Teil C: Stochastik

Adam hat für seinen GTR ein Spaßprogramm geschrieben, das (in Anlehnung an bekannte Bildschirmschoner) den Anfangsbuchstaben "A" seines Namens an zufällig gewählte Stellen des Displays schreibt. Das Display seines GTR hat 8 Zeilen mit je 16 Feldern. In jedem Feld kann genau ein Zeichen dargestellt werden.
Sein Programm startet stets mit leerem Display (s. Abb. 1).

```
----------------
----------------
----------------
----------------
----------------
----------------
----------------
----------------
```

Abb. 1

Danach wird per Zufallsgenerator ein Feld ausgewählt und in dieses der Buchstabe "A" geschrieben. Dieser Versuch wird insgesamt 10-mal durchgeführt.
Wird ein Feld ermittelt, in dem bereits "A" steht, ergibt sich keine Änderung auf dem Bildschirm. Es können also bis zu 10 Buchstaben "A" nach Programmende auf dem Display stehen (z.B. s. Abb.2).

```
----------------
--A----A--------
--------A-------
-----AA------A--
---------A-A----
----------------
------A---------
-----------A----
```

Abb. 2

a) Nach einer Ausführung des Programms stehen 10 Buchstaben "A" auf dem Display. Ermitteln Sie, wie viele verschiedene Anordnungen dieser 10 Buchstaben "A" auf dem Display möglich sind.

Erreichbare BE-Anzahl: 2

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass nach Programmende in der ersten Zeile wenigstens einmal ein "A" steht. Ermitteln Sie, wie oft das Programm durchschnittlich ein Feld in der ersten Zeile auswählt.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

c) Das Programm wird jetzt so verändert, dass es nicht nach 10 Versuchen abbricht. Ermitteln Sie, wie viele Versuche notwendig sind, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99% wenigstens einmal ein Buchstabe "A" in der ersten Zeile steht.

Erreichbare BE-Anzahl: 2

d) In einer weiteren Form des Programms werden drei Versuche durchgeführt. Wird dabei ein Feld ermittelt, in dem bereits ein "A" steht, wird dieser Buchstabe gelöscht. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass nach Programmende genau einmal der Buchstabe "A" auf dem Display steht.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

Adam arbeitet in einer Firma, die einen GTR- Typ zusammenbaut. Die Zulieferfirmen F1 und F2 liefern unabhängig voneinander ein bestimmtes Bauteil für diesen GTR. Andere Hersteller für dieses Bauteil gibt es nicht. 4% der Bauteile der Firma F1 und 6% der Bauteile der Firma F2 sind fehlerhaft. Zwei Drittel aller fehlerhaften Bauteile sind von der Firma F1.

e) Ermitteln Sie für beide Zulieferfirmen jeweils den prozentualen Anteil an der Gesamtlieferung dieses Bauteils.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

f) Bei einer Lieferung von 2000 Stück dieses Bauteils, die alle von derselben Zulieferfirma kommen, ist durch einen Verlust des Lieferscheines nicht mehr feststellbar, welche der beiden Zulieferfirmen der Produzent war. Folgende Entscheidungsregel wird getroffen: Sind mehr als 99 Teile fehlerhaft, wird die Lieferung der Firma F2 zugeordnet.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Lieferung fälschlicherweise der Firma F2 zugeordnet wird, obwohl sie in Wirklichkeit von der Firma F1 kommt.

Erreichbare BE-Anzahl: 2

C) Stochastik I

a) Anzahl der Felder : $8 \cdot 16 = \underline{128}$

Problem der Kombinatorik : $C^{10}_{128} = \underline{\underline{2{,}27 \cdot 10^{14}}}$ Anordnungen ✓ (2)

b) X sei Anzahl der „A" in der 1. Zeile

$n = 10 \; ; \; p = \frac{16}{128} = \frac{1}{8}$

$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \binom{10}{0} \cdot \frac{1}{8}^0 \cdot \frac{7}{8}^{10}$

$= 1 - 0{,}2631 = \underline{\underline{0{,}7369}}$ ✓ (3)

$E(X) = n \cdot p = 10 \cdot \frac{1}{8} = \underline{\underline{1{,}25}}$ ✓

c) $P(X \geq 1) \geq 0{,}99$ ✓

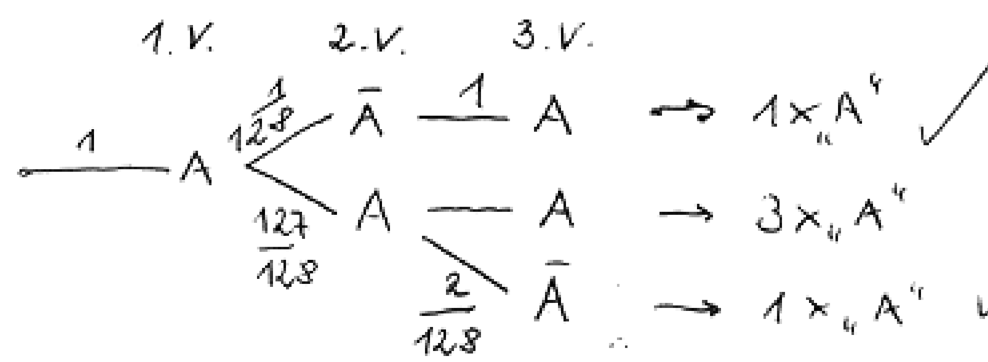
$1 - P(X=0) \geq 0{,}99$

$1 - \binom{n}{0} \cdot \frac{1}{8}^0 \cdot \frac{7}{8}^n \geq 0{,}99$

$\frac{7}{8}^n \leq 0{,}01$ (2)

$\underline{\underline{n \approx 35}}$ ✓

d) drei Versuche:



(3)

$P(1x \text{„A"}) = 1 \cdot \frac{1}{128} \cdot 1 + 1 \cdot \frac{127}{128} \cdot \frac{2}{128} = \underline{\underline{0{,}0233}}$ ✓

e) F_1 : $\frac{2}{3}$ aller defekten Bauteile = 4% der Bauteile von F_1

F_2 : $\frac{1}{3}$ aller defekten Bauteile = 6% der Bauteile von F_2

⇒ F_1 hält einen Anteil von $16\frac{2}{3}$ (100%) ✓ } an der Lieferung (3)

F_2 hält einen Anteil von $5\frac{5}{9}$ (100%)

⇒ $16\frac{2}{3}$ von $22\frac{2}{9}$ (Gesamtanteil beider Firmen) = $\underline{\underline{75\% \text{ für } F_1}}$ ✓

$5\frac{5}{9}$ von $22\frac{2}{9}$ (") = $\underline{\underline{25\% \text{ für } F_2}}$

NR: $4\% = \frac{2}{3}$ ⇒ $x = \frac{100 \cdot \frac{2}{3}}{4} = 16{,}\bar{6} = 16\frac{2}{3}$ } $\Sigma = 22\frac{2}{9}$

$100\% = x$

$6\% = \frac{1}{3}$ ⇒ $x = \frac{100 \cdot \frac{1}{3}}{6} = 5{,}\bar{5} = 5\frac{5}{9}$

$100\% = x$

f) $n = 2000$; $p_1 = 0{,}04$; $p_2 = 0{,}06$ ← (f)

$\left.\begin{array}{l} \mu_1 = n \cdot p_1 = 80 \text{ Stck} \\ \mu_2 = n \cdot p_2 = 120 \text{ Stck} \end{array}\right\}$ Ø fehlerhaft

$\left.\begin{array}{l} \sigma_1 = \sqrt{n p_1 q_1} = \sqrt{2000 \cdot 0{,}04 \cdot 0{,}96} \approx 8{,}76 \\ \sigma_2 = \sqrt{n p_2 q_2} = \sqrt{2000 \cdot 0{,}06 \cdot 0{,}94} \approx 10{,}62 \end{array}\right\}$ Standardabweichung

X – Anzahl der fehlerhaften Teile

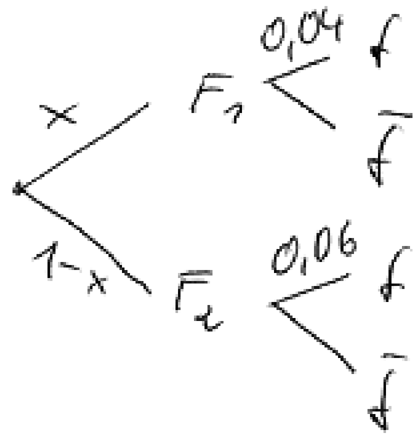
$$P(X > 99) = 1 - P(X \leq 99)$$
$$= 1 - \Phi\left(\frac{99 - 80}{8{,}76}\right)$$
$$= 1 - \Phi(2{,}1689)$$
$$= 1 - 0{,}9850$$
$$= \underline{\underline{0{,}015}}$$

Mit einer WK. von 0,015 wird bei mehr als 99 fehlerhaften Teilen die Lieferung der Firma 2 zugeordnet, obwohl sie in Wirklichkeit von der Firma 1 kommt.

Variante zu e)

geg.: F_1 .. Bauteil aus Firma 1
F_2 .. Bauteil aus Firma 2
f .. fehlerhaft
$P_{F_1}(f) = 0{,}04$; $P_{F_2}(f) = 0{,}06$; $P_f(F_1) = \frac{2}{3}$

ges.: $P(F_1)$; $P(F_2)$



Lös.: Satz von Bayes:

$$P_f(F_1) = \frac{P(f \cap F_1)}{P(f)}$$
$$= \frac{P(F_1) \cdot P_{F_1}(f)}{P(F_1) \cdot P_{F_1}(f) + P(F_2) \cdot P_{F_2}(f)}$$ (mit $x = P(F_1)$) folgt

$$\frac{2}{3} = \frac{x \cdot 0{,}04}{x \cdot 0{,}04 + (1-x) \cdot 0{,}06}$$

$\underline{\underline{x = 0{,}75}}$ ⇒ $P(F_1) = 75\%$
$\underline{\underline{\text{u. } P(F_2) = 25\%}}$