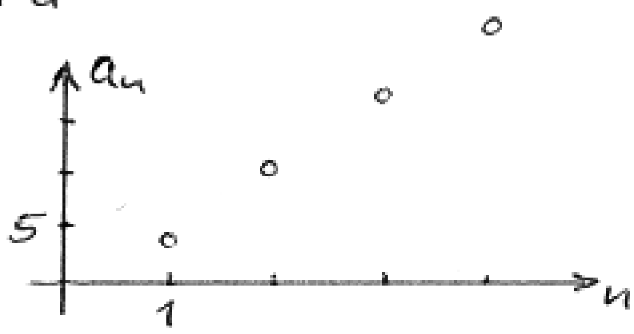
Lösungen zu 3.

1. ZF sind Funktionen mit einer Menge natürlicher Zahlen als DB und einer Menge reeller Zahlen als WB

2. $\underbrace{(a_n)}_{\text{Name der ZF}} = (\underset{\text{1. ZFG}}{a_1}, \underset{\text{2. ZFG usw.}}{a_2}, a_3, \dots, \underset{\text{n-tes ZFG}}{a_n}, \dots)$

3. a) $(a_n) = (7n-3)$

$a_{k+1} = a_k + 7$ mit $a_1 = 4$



b) $(a_n) = (45 - 10n)$

$a_{k+1} = a_k - 10$ mit $a_1 = 35$

c) $(a_n) = \left(\frac{1}{3}n\right)$

$a_{k+1} = a_k + \frac{1}{3}$ mit $a_1 = \frac{1}{3}$

d) $(a_n) = (n+1)^2$

$a_{k+1} = a_k + 2k+3$ mit $a_1 = 4$

e) $(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$

$a_{k+1} = a_k \cdot \frac{n}{n+1}$ mit $a_1 = 1$

f) $(a_n) = (n^2 + n)$

$a_{k+1} = a_k + 2k + 2$ mit $a_1 = 2$

g) $(a_n) = \left(\frac{10^n - 1}{3 \cdot 10^n}\right)$

$a_{k+1} = a_k + \frac{3}{10^{k+1}}$ mit $a_1 = 0{,}3$

---

4. -1 ist a_1; 0 ist a_2; 24 ist a_6

5. a) $(a_n) = \left(2;\ 2\frac{1}{3};\ 2\frac{2}{3};\ 3;\ 3\frac{1}{3}, \dots, a_n, \dots\right)$

$(a_n) = \left(\frac{1}{3}n + \frac{5}{3}\right)$

b) $a_{115} = 40$; $a_{2396} = 801$

c) $2000 < \frac{1}{3}k + \frac{5}{3}$

$6000 < k + 5$

$5995 < k$ $\wedge$ a_{5996} erstmals > 2000

6. a) $(a_n) = (1; 2; 2; 3; 2; 4; 2; 4; \dots)$

b) $(a_n) = (-; -; 0; 2; 5; 9; 14; 20; \dots) = (C_n^2 - n)$

c) $(a_n) = (-; -; 180°; 360°; 540°; 720°; 900°; 1080°; \dots) = (180° n - 360°)$

7. $a_k)$ $5k+2$; $5k+7$; $5k+12$

$b_k)$ $\frac{k-3}{3k-3}$; $\dots$; $\frac{k-1}{3k+3}$

$c_k)$ $\frac{k(k+1)}{(k-1)^2}$; $\dots$; $\frac{(k+2)(k+3)}{(k+1)^2}$

$d_n)$ $\frac{n^2+2n-5}{n^2}$; $\dots$; $\frac{n^2+6n+3}{(n+2)^2}$

$e_i)$ $\frac{2^{i+4}}{3^{i-3}}$; $\dots$; $\frac{2^{i+6}}{3^{i-1}}$

8.	arithmet. ZF	geometr. ZF
$12; 36;$	$60; 84; 108$ $(+24)$	$108; 324; 972$ $(\cdot 3)$
$\frac{5}{9}; \frac{3}{11};$	$-\frac{1}{99}; -\frac{29}{99}; -\frac{57}{99}$ $\left(-\frac{28}{99}\right)$	$\frac{81}{605}; \frac{2187}{33275}; \frac{59049}{1830125}$ $\left(\cdot \frac{27}{55}\right)$
$-4; -1$	$2; 5; 8$ $(+3)$	$-\frac{1}{4}; -\frac{1}{16}; -\frac{1}{64}$ $\cdot\left(\frac{1}{4}\right)$

9. a) $q^4 = \frac{a_8}{a_4} = \frac{5}{0{,}2} \wedge q = \pm\sqrt[4]{25} = \pm\sqrt{5}$

$(a_n) = \left(\frac{1}{25\sqrt{5}}; \frac{1}{25}; \frac{1}{5\sqrt{5}}; \frac{1}{5}; \frac{1}{5}\sqrt{5}; 1; \sqrt{5}; 5; \dots\right)$

b) $\left(a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = \frac{1}{25\sqrt{5}} \cdot (\sqrt{5})^{n-1}\right)$

$a_{25} = \frac{1}{25\sqrt{5}} \cdot (\sqrt{5})^{24} \approx \underline{\underline{4\,367\,320{,}3}}$

c) $a_n = 78125 = \frac{1}{25\sqrt{5}} \cdot (\sqrt{5})^{n-1}$; $\underline{\underline{n \approx 20}}$

10a) ZF (a_n) ist monoton wachsend

$=_{df.}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt $a_{n+1} - a_n \geqq 0$

ZF (a_n) ist monoton fallend

$=_{df.}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt $a_{n+1} - a_n \leqq 0$

b) I) $a_{n+1} - a_n$

$= (n+1)^2 - 8(n+1) + 19 - n^2 + 8n - 19$

$= n^2 + 2n + 1 - 8n - 8 + 19 - n^2 + 8n - 19$

$\underline{= 2n - 7}$ $\left.\begin{array}{l}\text{für } n \leqq 3 \text{ kleiner } 0 \\ \text{ab } n = 4 \text{ größer } 0\end{array}\right\}$ nicht monot.

II) $a_{n+1} - a_n$

$= \frac{n+4}{n+5} - \frac{n+3}{n+4}$

$= \frac{(n+4)^2 - (n+3)(n+5)}{(n+5)(n+4)}$

$= \frac{n^2 + 8n + 16 - n^2 - 8n - 15}{(n+5)(n+4)}$

$\underline{= \frac{1}{(n+5)(n+4)}}$ > 0 $\forall n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$ monot. wachsend

III $a_{n+1} - a_n$

$= 2^{n+1} - (n+1)^2 - 2^n + n^2$

$= 2 \cdot 2^n - n^2 - 2n - 1 - 2^n + n^2$

$\underline{= 2^n - 2n - 1}$ $\left.\begin{array}{l}\text{für } n \leqq 2 \text{ kleiner } 0 \\ \text{ab } n = 3 \text{ größer } 0\end{array}\right\}$ nicht monoton

11. $(v_n) = \left(a^3; \frac{1}{8}a^3; \frac{1}{64}a^3; \dots; \frac{1}{8^{n-1}}a^3; \dots\right)$