Lösungen PK 6 – Mathematik Leistungskurs 2024/25

1. Aufgabe:

geg.: $f_k(x) = ke - ke^{-x}$; $k > 0, k \in \mathbb{R}$

$\hat{=}$ Verlauf Mittellinie einer Schnellstraße

1.1. ges.: Nullstelle $f_k(x)$ soll bei $x_0 = -1$ liegen

Lö.: $0 = ke - ke^{-x}$ ✓ Weisen Sie nach!

$ke^{-x} = ke \quad | : k \neq 0$

$e^{-x} = e$ ✓

$-x = \ln e$

$\underline{\underline{x_0 = -1}}$ ✓

7

ges.: f_k soll streng monoton wachsend sein $\forall k > 0$

Lö.: $f_k'(x) = ke^{-x}$ ✓ $\Rightarrow \forall k > 0 \wedge \forall x \in \mathbb{R}$ ist $ke^{-x} > 0$

Zeigen Sie!

$\Rightarrow f_k$ ist monoton wachsend, Anstieg stets positiv! ✓

ges.: k dafür, dass f_k durch $P(0|e-1)$ geht

Lö.:

$e - 1 = ke - ke^{0}$ ✓

$e - 1 = ke - k$

$e - 1 = k \cdot (e-1) \Rightarrow \underline{\underline{k = 1}}$ ✓

1.2. geg.: $f_1(x) = e - e^{-x}$; $g(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

2

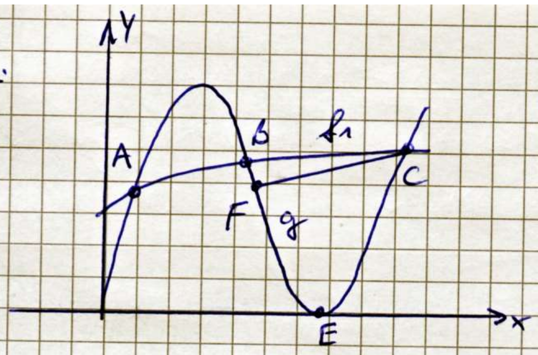
ges.: Schnittpunktkoordinaten

CP Lö.: E: $e - e^{-x} = x^3 - 6x^2 + 9x$; CP Lö.: E: x_A wie

für x_B: V: SOLVE | für y_A: V: Ber. y_A

A: $\underline{\underline{x_B = 1,81}}$ ✓ | A: $\underline{\underline{y_A = 1,95}}$ ✓

1.3. geg.:



ges.: Länge $f_1(A-C)$; Länge $g(A-C)$

$\Rightarrow$ Längendifferenz L

Lös.: Bestimmung der Bogenlängen (mit CP)

E: f_1, g

V: $\text{arcLen}(f_1(x), x, x_A, x_C) = 3{,}72$ Km

A: $\text{arcLen}(g(x), x, x_A, x_C) = 9{,}76$ Km

$\Rightarrow$ $L \approx 6{,}041$ Km

1.4 Die Landstraße ist g(x), also ist E das Minimum von g

$E(3|0)$

F sei $F(x_F|y_F)$ ==> Da F auf g liegt ist $y_F = g(x_F)$

Der Abstand zu C ist $|\overline{EF}| = \sqrt{(3{,}838 - x_F)^2 + (2{,}697 - g(x_F))^2}$

Nun mit dem Taschenrechner das Minimum suchen: $x_F \approx 1{,}9748$

bei einer minimalen Länge von $l \approx 1{,}9641$

(das zweite Minimum bei 3.8382 liegt nicht zwischen B und E)

den gefundenen Wert in g(x) einsetzen ==> $F(1{,}975|2{,}075)$

1.5

ges.: Fläche, die begrenzt wird von f_1 und g im Intervall $I[x_A / x_C]$

Lös.: $A = \int_{0,259}^{1,81} g(x) - f_1(x)\,dx + \int_{1,813}^{3,838} f_1(x) - g(x)\,dx =$

$A = 1{,}69 \text{ Km}^2 + 3{,}475 \text{ Km}^2 = 5{,}165 \text{ Km}^2$

$A \approx 516{,}5$ ha $\hat{=}$ 51650 Bäume

2. Aufgabe:

7

a) $f_a(x) = a^2x - \ln x \qquad (a>0)$

$f_a'(x) = a^2 - \frac{1}{x}$ ✓

notw. B.: $0 = a^2 - \frac{1}{x}$ NR: $f_a\left(\frac{1}{a^2}\right) = a^2\cdot\frac{1}{a^2} - \ln\frac{1}{a^2} = 1 + 2\ln a$

$\underline{x_E = \frac{1}{a^2}}$ ✓

$f_a''(x) = \frac{1}{x^2}$

hinr. B. $f_a''\left(\frac{1}{a^2}\right) = a^2 > 0 \Rightarrow \underline{\underline{P_T\left(\frac{1}{a^2} \middle| 1+2\ln a\right)}}$ ✓ bzw. $\left(\frac{1}{a^2} \middle| 1-\ln\frac{1}{a^2}\right)$

geomet. Ort: $x = \frac{1}{a^2} \Rightarrow \underline{a^2 = \frac{1}{x}}$

4

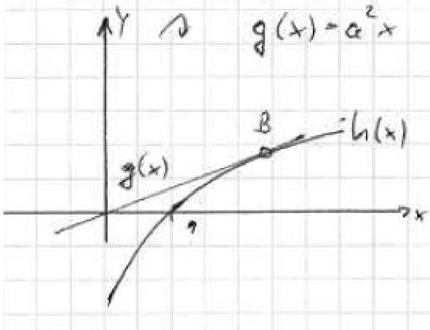
$\underline{\underline{y}} = 1 - \ln\frac{1}{a^2} = \underline{\underline{1-\ln x}}$ ✓

b) es gibt genau eine Fkt. mit einer Nullstelle

$f_a(x) = 0 = a^2x - \ln x \quad (*)$

$a^2x = \ln x$ darf nur eine Lösung haben!

$\Rightarrow$ $g(x) = a^2x$ ist Tangente an $h(x) = \ln x$



$\Rightarrow$ $h'(x)$ hat den Anstieg a^2 im Berührpunkt B ✓

$\Rightarrow h'(x) = \frac{1}{x}$

$\frac{1}{x} = a^2$

3

$x_B = \frac{1}{a^2}$

x_B ist gleichzeitig Lösung der Gleichung (*)

Probe: $0 = a^2\cdot\frac{1}{a^2} - \ln\frac{1}{a^2}$

$0 = 1 - \ln\frac{1}{a^2}$ $\Rightarrow$ der Wert von a:

$0 = 1 + 2\ln a$

$-\frac{1}{2} = \ln a$

$\underline{\underline{a = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}}}$ ✓ $\Rightarrow$ es gibt nur 1 Fkt.!

$\Rightarrow$ Nullstelle: $x_0 = x_B = \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^2} = \underline{\underline{e}}$ ✓

c) Tangentengleichung: $y = mx$

mit $m = f_a'(x_0) = a^2 - \frac{1}{x_0}$ bei B_a (Berührpunkt)

$\Rightarrow \quad y = \left(a^2 - \frac{1}{x_0}\right)x$

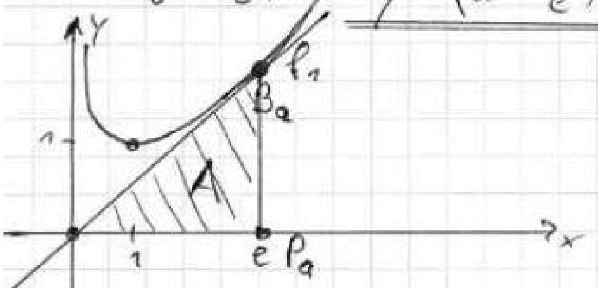
$P_0 \rightarrow \quad a^2 x_0 - \ln x_0 = \left(a^2 - \frac{1}{x_0}\right)x_0$

$\cancel{a^2 x_0} - \ln x_0 = \cancel{a^2 x_0} - 1$

$\ln x_0 = 1 \quad \Rightarrow \quad \underline{x_0 = e}$

$\Rightarrow \quad f_a'(e) = a^2 - \frac{1}{e}$

$\Rightarrow \quad t: \quad \underline{\underline{y = \left(a^2 - \frac{1}{e}\right)x}}$ ✓



$B_a\left(e \,/\, a^2 e - 1\right)$ ✓

$P_a\left(e \,/\, 0\right)$

$A = 5 = \frac{1}{2}\, e \cdot (a^2 e - 1)$

$10 = a^2 e^2 - e \quad \Rightarrow \quad a^2 = \frac{10 + e}{e^2}$

$\underline{\underline{a_1 = \frac{1}{e}\sqrt{10 + e}}}\ ; \ a_2 < 0$

✓

3. Aufgabe:

geg.: $f_k(x) = x^2 \cdot e^{1-kx}$; $g_k(x) = x \cdot e^{1-kx}$; $k > 0$

a) • NSt. für $f_k(x)$:

$0 = x^2 \cdot e^{1-kx}$

$\underline{x_0 = 0}$ ✓

$0 \neq e^{1-kx}$

• Nachweis der 2. Ableitung:

$f_k'(x) = 2x e^{1-kx} + x^2 \cdot (-k) e^{1-kx}$ ✓

$f_k'(x) = e^{1-kx}(2x - kx^2)$ ✓

$f_k''(x) = (-k) e^{1-kx}(2x - kx^2) + e^{1-kx} \cdot (2 - 2kx)$ ✓

$f_k''(x) = e^{1-kx}(-2kx + k^2x^2 + 2 - 2kx)$

$\underline{\underline{f_k''(x) = e^{1-kx}(k^2x^2 - 4kx + 2)}}$ w.z.z.w. ✓

• lok. Extrempunkte:

n.B.: $f_k'(x) = 0 = \underbrace{e^{1-kx}}_{\neq 0}(2x - kx^2)$ ✓

$0 = 2x - kx^2$

$\underline{x_{E_1} = 0}$

$0 = 2 - kx$

$\underline{x_{E_2} = \frac{2}{k}}$ } ✓

12

h.B.: $f_k''(0) = e^1(2) = \underline{2e} > 0 \Rightarrow$ Min $\underline{P_T(0|0)}$ ✓

$f_k''\left(\frac{2}{k}\right) = e^{1-k\cdot\frac{2}{k}}\left(k^2 \cdot \frac{4}{k^2} - 4k \cdot \frac{2}{k} + 2\right)$

$= e^{-1}(-2) = \underline{-2e^{-1}} < 0 \Rightarrow$ Max $\underline{P_H\left(\frac{2}{k} \middle| \frac{4}{k^2 e}\right)}$ ✓

• „geometrischer Ort aller Extrempunkte"

$x = \frac{2}{k} \Rightarrow k = \frac{2}{x}$ ✓

$y = \frac{4}{\left(\frac{2}{x}\right)^2 \cdot e} \Rightarrow \underline{\underline{y = \frac{x^2}{e}}}$ ✓ enthält auch P_T! ✓

b) • Wendestellen:

u.B.: $f_k''(x) = 0 = \underbrace{e^{1-kx}}_{\neq 0}(k^2x^2 - 4kx + 2)$

$$0 = k^2x^2 - 4kx + 2 \quad |:k^2$$

$$0 = x^2 - \frac{4}{k}x + \frac{2}{k^2}$$

$$x_{1,2} = \frac{2}{k} \pm \sqrt{\frac{4}{k^2} - \frac{2}{k^2}} = \frac{2}{k} \pm \sqrt{\frac{2}{k^2}}$$

$$\underline{\underline{x_{w_1} = \frac{2}{k} + \frac{1}{k}\sqrt{2} \;; \quad x_{w_2} = \frac{2}{k} - \frac{1}{k}\sqrt{2}}}$$

c) • Schnittpunkte:

$$x^2 \cdot e^{1-kx} = x e^{1-kx} \quad | : e^{1-kx} \neq 0$$

$$x^2 = x$$

$$0 = x^2 - x$$

$$\left.\begin{array}{l} \underline{x_{S_1} = 0} \\ 0 = x - 1 \\ \underline{x_{S_2} = 1} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \underline{S_1(0|0)} \\ \underline{\underline{S_2(1|e^{1-k})}} \end{array}\right\}$$

(4)

• Graphen schneiden sich in $Q(1|1)$:
gilt für S_2 bei $e^{1-k} = 1 \Rightarrow \underline{\underline{k = 1}}$

d) • für welches k beträgt der Anstieg von f_k bei $x = 1$
$\tan 45° = 1$

$$f_k'(x) = e^{1-kx}(2x - kx^2)$$

$$1 = f_k'(1) = e^{1-k}(2 - k)$$

$$0 = e^{1-k}(2-k) - 1 \Rightarrow \text{TR}: \underline{\underline{k = 1}}$$

• Tangentengleichung an $f_1(x)$ in $x = 1$ $\quad (f_1(x) = x^2 \cdot e^{1-x})$

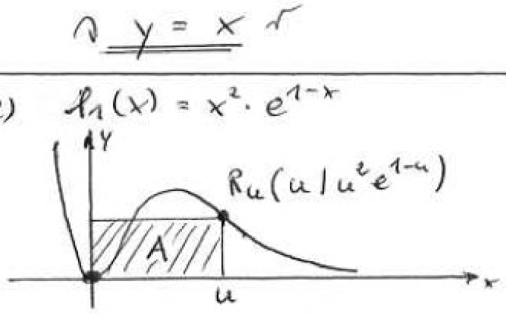
$y = x + n \qquad P(1|\underline{\underline{1}})$ einsetzen

$n = 0$

$\Rightarrow \underline{\underline{y = x}}$

(5)

e) $f_1(x) = x^2 \cdot e^{1-x}$



$\boxed{A \to Max}$

$$A = f(u) = u \cdot u^2 e^{1-u}$$

$$f(u) = u^3 e^{1-u}$$

TR

$$\underline{u = 3}$$

$$\underline{\underline{A \approx 3{,}65}}$$

$$\underline{\underline{R_u\left(3 \,\middle|\, \frac{9}{e^2}\right)}}$$

(5)