Lösungen

1.) geg.: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \; b \in \mathbb{R}$

ges.: Parameter b, falls $E \parallel g$ oder $E \times g$

Lös.: E in Koordinatenform umwandeln:

CP: Main: $\begin{vmatrix} x-1 & 1 & b \\ y-5 & 2 & 0 \\ z-5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$\det(|\,..\,|) = 0$

$\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{2x - y - 2bz = -10b - 3}}$

g in E einsetzen:

$$
\begin{aligned}
2\cdot(2+r) - (4r) - 2b(8+3r) &= -10b - 3 \\
4 + 2r - 4r - 16b - 6br &= -10b - 3 \\
-2r - 6br &= 6b - 7 \\
r(-2-6b) &= 6b - 7 \\
\underline{\underline{r}} &\underline{\underline{= \frac{6b-7}{-6b-2}}}
\end{aligned}
$$

$\Leftrightarrow$ I) falls $(6b-7) \neq 0 \wedge (-6b-2) = 0$: $g \parallel E$

II) falls $(6b-7)$ beliebig $\wedge$ $(-6b-2) \neq 0$: $g \times E$

$\Leftrightarrow$ I) $\underline{\underline{b = -\frac{1}{3}}}$ $\quad$ II) $\underline{\underline{b \neq -\frac{1}{3}}}$

2.) geg.: $E(P, Q, R)$ in Parameterform aufstellen und daraus Koordinatenform herstellen:

$\Leftrightarrow \quad 11x - 3y - z = 26$

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; a ist Parameter, $a \in \mathbb{R}$

ges.: Lage , Lös.: g in E einsetzen:

$11(2+ar) - 3(1+r) - (5+r) = 26 \Leftrightarrow r = \frac{12}{11a-4}$

Lös.: für $\underline{a = \frac{4}{11}}$ gilt: $\underline{\underline{E \parallel g}}$ / für $\underline{a \neq \frac{4}{11}}$ gilt: $\underline{\underline{E \times g}}$

3.) $g_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}$; $h_{b,c}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ c \end{pmatrix}$ ②

Lös: $g \parallel h \vee g \equiv h$

① falls $\begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -2 \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} a = -2t \\ 1 = ct \end{matrix} \Leftrightarrow t = \frac{1}{c} \wedge a = -\frac{2}{c}$

oder

$ac = -2$

② und $\begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}$ Punktprobe

$\Leftrightarrow \begin{matrix} 0 = -1 + ra \\ b = 3 + r \end{matrix} \Leftrightarrow r = b - 3 \wedge \begin{matrix} 0 = -1 + (b-3)a \\ 0 = -1 + a(b-3) \end{matrix}$

oder

$a(b-3) = 1$

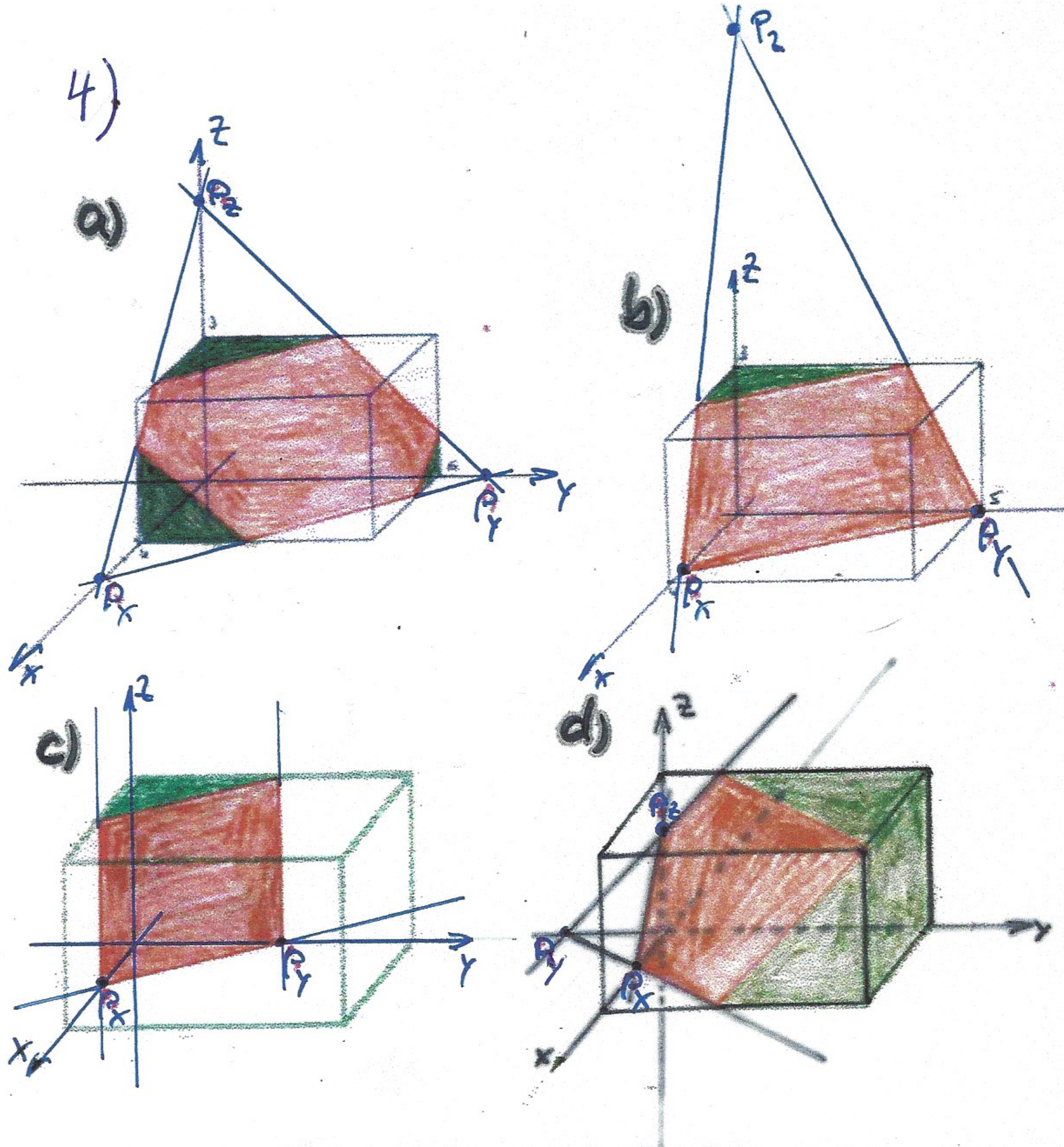
$\Rightarrow$ für $g \parallel h$ gilt also: $ac = -2$ u. $a(b-3) \neq 1$

für $g \equiv h$: $ac = -2$ u. $a(b-3) = 1$

Lös.: $g \times h$

falls $\begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} \neq t \begin{pmatrix} -2 \\ c \end{pmatrix} \Rightarrow ac \neq -2$ u. $b \in \mathbb{R}$

4)



a) $P_x(6|0|0)$; $P_y(0|6|0)$; $P_z(0|0|6)$

b) $P_x(\frac{10}{3}|0|0)$; $P_y(0|5|0)$; $P_z(0|0|10)$

c) $P_x(2|0|0)$; $P_y(0|\frac{8}{3}|0)$

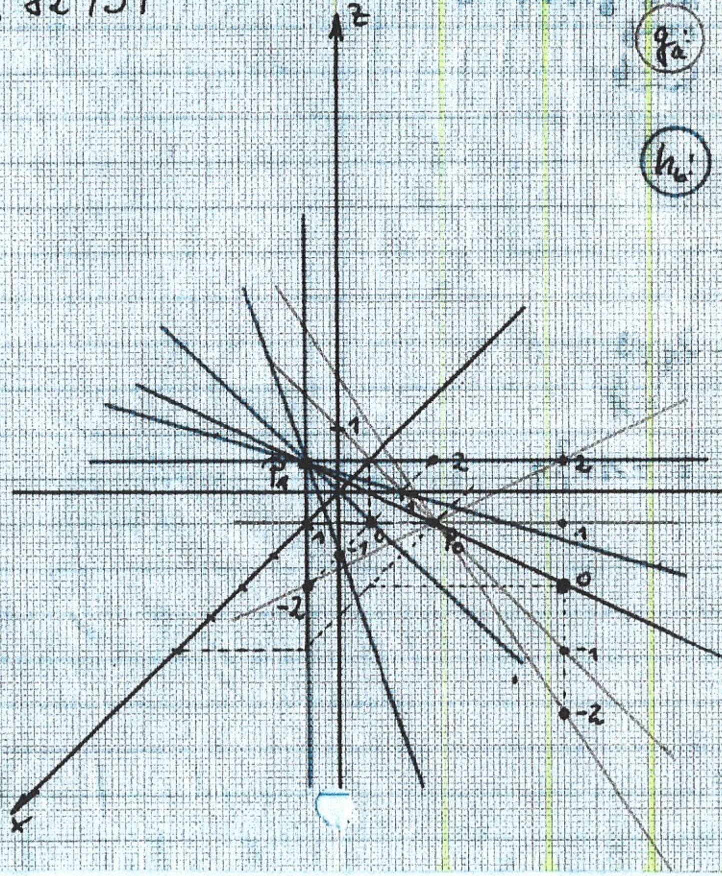
d) $P_x(2|0|0)$; $P_y(0|-2|0)$; $P_z(0|0|2)$

$E: x - y + z = 2$

bzw. $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 5

S. 82 / 37



g_a: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}2\\3\\a\end{pmatrix}$

$a \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$

h_b: $\vec{x} = \begin{pmatrix}5\\2\\3\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}b\\1\\-1\end{pmatrix}$

$b \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$

für $a=0 \Rightarrow S(3|5|0)$

$\Rightarrow h_b$ $\vec{x} = \begin{pmatrix}5\\2\\3\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}b\\1\\-1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix}3\\5\\0\end{pmatrix} = \dots \Rightarrow s=3$, $\underline{\underline{b=-\frac{2}{3}}}$

$h_{-\frac{2}{3}}$ und g_0 schneiden sich in $S(3|5|0)$

$g_a \times h_b$: gleichsetzen:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I} & 1 + 2r = 5 + bs \\ \text{II} & 2 + 3r = 2 + s \\ \text{III} & ar = 3 - s \Rightarrow s = 3 - ar \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{r = \frac{3}{3+a}}}$$ in I einsetzen

$\Rightarrow \underline{\underline{0 = 6 + 4a + 9b}}$; r in g einsetzen $\Rightarrow \underline{\underline{S\left(\frac{9+a}{3+a} \middle| \frac{15+2a}{3+a} \middle| \frac{3a}{3+a}\right)}}$

4

6.) geg.: $E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 17 \\ 6 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$

ges.: Lage E_1, E_2

Lös.: Koordinatengleichungen herstellen

$E_1: \begin{vmatrix} x-1 & 0 & 1 \\ y-5 & 1 & 1 \\ z & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$ $\qquad$ $E_2: \begin{vmatrix} x-7 & 3 & 2 \\ y-17 & 5 & 5 \\ z-6 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow \underline{-3x + 2y - z = 7}$

$\Leftrightarrow 15x - 10y + 5z = -35 \quad | :5$
$\Leftrightarrow 3x - 2y + z = -7 \quad | \cdot(-1)$
$\Leftrightarrow \underline{-3x + 2y - z = 7}$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{E_1 \equiv E_2}}$

---

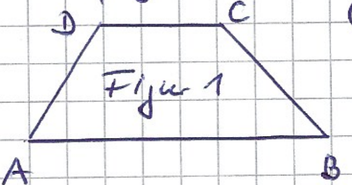
7) LB S. 145/7

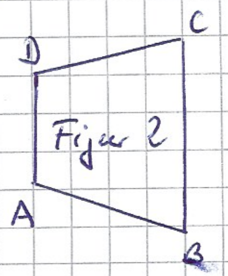
geg.: $A(-1|1|1)$; $B(1|3|2)$; $C(5|6|8)$; $D(1|2|6)$

$P_k(1|8k|10k)$; $k \in \mathbb{R}$

ges.: a) Viereck ABCD ist ein Trapez und kein Parallelogramm

Lös.: Trapeze haben genau ein Paar nicht paralleler Seiten, die sich gegenüberliegen, d.h. wenn ABCD ein Trapez ist, gilt: $\vec{AD} \neq r \cdot \vec{BC}$ (Figur 1) oder auch $\vec{AB} \neq r \cdot \vec{DC}$ (Figur 2)





Ansatz: $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{DC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ Figur 1

$\vec{AD} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$; $\vec{BC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

Es gilt offensichtlich: $\vec{AD} \neq r \, \vec{BC}$

und: $\vec{AB} = s \cdot \vec{DC}$ mit $s = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{\text{ABCD ist ein Trapez}}}$

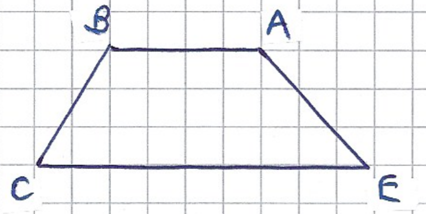
zu 7)

ges.: b) Koordinaten für E, damit ABCE ein Trapez ist:

mit (1) $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CE}$ und

(2) $|\overrightarrow{CE}| = 3 \cdot |\overrightarrow{AB}|$

Skizze:



mit $A(-1|1|1)$, $B(1|3|2)$, $C(5|6|8)$

(Achtung: Beschriftung immer G)

Lös.:

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CE}$ bedeutet laut Skizze auch

mit Bed. (2): $3 \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EC}$

$\curvearrowright 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_C - x_E \\ y_C - y_E \\ z_C - z_E \end{pmatrix}$

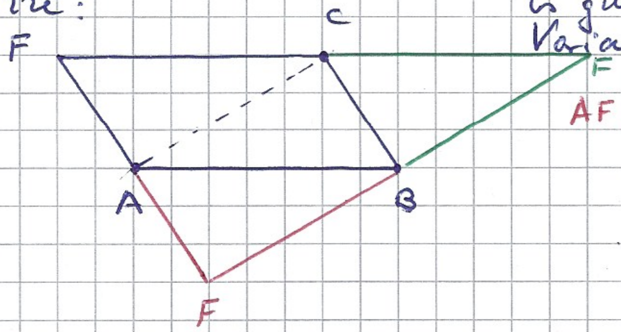
$\curvearrowright \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 - x_E \\ 6 - y_E \\ 8 - z_E \end{pmatrix}$ $\curvearrowright$ $x_E = -1$, $y_E = 0$, $z_E = 5$

$\curvearrowright \underline{\underline{E(-1|0|5)}}$

---

ges.: c) Koordinaten für F, damit ABCF ein Parallelogramm ist:

Lös.: Skizze:



Es gibt noch 2 weitere Varianten für Parallelogramme!

AFBC und ABFC

Für ABCF folgt: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{FC}$

$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 - x_F \\ 6 - y_F \\ 8 - z_F \end{pmatrix} \curvearrowright \underline{\underline{F(3|4|7)}}$

für AFBC folgt:

$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{CB} \curvearrowright \begin{pmatrix} x_F - (-1) \\ y_F - 1 \\ z_F - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} \curvearrowright \underline{F(-5|-2|-5)}$

für ABFC folgt $\underline{\underline{F(7|8|9)}}$

zu 7)

ges.: d) Koordinaten von $P_K(1|8K|10K)$, falls $P_K \in E(ABCD)$ ist.

Lös.: Ebene E aus den Punkten A, B, C bilden und Punktprobe mit P_K durchführen ⇝ K bestimmen

$$E: \vec{x} = \vec{OA} + r\,\vec{AB} + s\,\vec{AC}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}6\\5\\7\end{pmatrix}$$

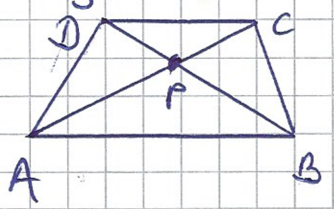
$$P_K \rightarrow \begin{pmatrix}1\\8K\\10K\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}6\\5\\7\end{pmatrix}$$ ⇝ LGS mit 3 Gl. und 3 Unbek.!

$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & 1 & = & -1 + 2r + 6s \\ \text{II} & 8K & = & 1 + 2r + 5s \\ \text{III} & 10K & = & 1 + r + 7s \end{array}$$ mit CP lösen!

$$K = \frac{1}{3};\ r = 0;\ s = \frac{1}{3}$$

$$\hookrightarrow \underline{\underline{P_{\frac{1}{3}}\left(1\middle|\frac{8}{3}\middle|\frac{10}{3}\right)}}$$

Ist $P_{\frac{1}{3}}$ Diagonalschnittpunkt des Trapezes ABCD?:



Dazu den Schnittpunkt der beiden Geraden AC und BD berechnen oder $P_{\frac{1}{3}}$ in beiden Geraden durch Punktprobe nachweisen.

⇝ $g(AC): \vec{x} = \vec{OA} + r\cdot\vec{AC}$ ⇝ $\vec{x} = \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}6\\5\\7\end{pmatrix}$

$g(BD): \vec{x} = \vec{OB} + s\,\vec{BD}$ ⇝ $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\-1\\4\end{pmatrix}$

Führe Punktproben durch, d.h. wenn $P_{\frac{1}{3}}$ auf beiden Geraden liegt, ist $P_{\frac{1}{3}}$ der Schnittpunkt.

$$\begin{pmatrix}1\\\frac{8}{3}\\\frac{10}{3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}6\\5\\7\end{pmatrix} \rightsquigarrow \left.\begin{array}{l} 1 = -1 + 6r \\ \frac{8}{3} = 1 + 5r \\ \frac{10}{3} = 1 + 7r \end{array}\right\} r = \frac{1}{3} \rightsquigarrow P_{\frac{1}{3}} \in g(AC)$$

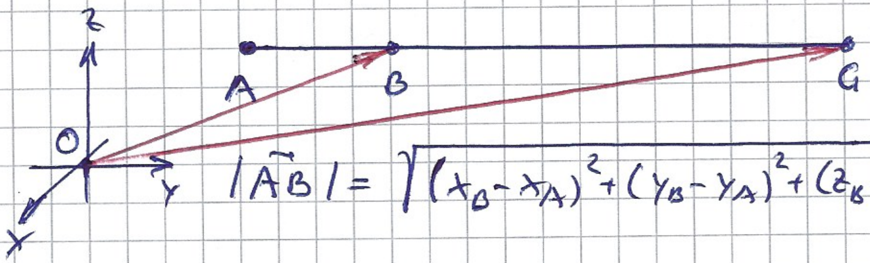
⇝ analog mit g(BD) verfahren: $s = \frac{1}{3}$ ⇝ $P_{\frac{1}{3}} \in g(BD)$

OK $P_{\frac{1}{3}}$ ist Sp.

zu 7)

ges.: e) Länge $|\vec{AB}|$, Koordinaten von G

Lös.: Skizze:



$$|\vec{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = \underline{\underline{3\,LE}}$$

$$\vec{OG} = \vec{OB} + \vec{BG}$$

$$= \vec{OB} + 6 \cdot \underbrace{\frac{1}{|\vec{AB}|} \cdot \vec{AB}}_{\text{Einheitsvektor der Länge 1!}}$$

$$\vec{OG} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{OG} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{OG} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} \;\hat{=}\; \underline{\underline{G(5/7/4)}}$$