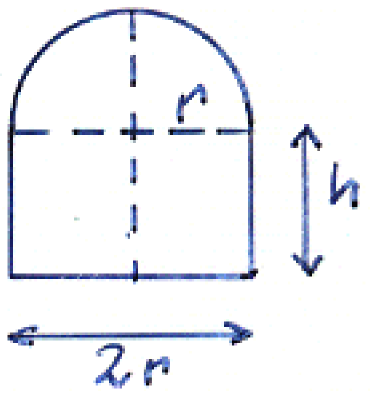
„Tunnelproblem"

geg.: $u = 18\,m$, für $V \to Max$ ist auch $A \to Max$

ges.: r

Skizze:



Ansatzfkt.:

$$A = f(r, h) = 2r \cdot h + \frac{1}{2}\pi r^2$$

NB:

$$u = \pi r + 2r + 2h = 18(m)$$

$$h = \frac{1}{2}(18 - \pi r - 2r)$$

Zielfunktion:

$$A = f(r) = r \cdot (18 - \pi r - 2r) + \frac{1}{2}\pi r^2$$
$$= 18r - (\pi + 2)r^2 + \frac{1}{2}\pi r^2$$
$$= 18r - \left(\frac{1}{2}\pi + 2\right)r^2$$

$$A' = f'(r) = 18 - 2\left(\frac{1}{2}\pi + 2\right)r$$

n. B: $0 = 18 - (\pi + 4)r$

$$(\pi + 4)r = 18$$

$$r_E = \frac{18}{\pi + 4} \approx \underline{\underline{2{,}52\,m}}$$

h. B: $A'' = f''(r_E) = -(\pi + 4) < 0 \curvearrowright \underline{\underline{Max}}$

Für einen Radius von 2,52m wird der Querschnitt und damit auch das Volumen maximal groß.

Lösungen zur Aufgabensammlung

zu 2.) „Widerstandsproblem"

geg.: $R_{Ges\parallel} = 90\,\Omega$

ges.: $R_{GesR} \rightarrow Min$
R_1, R_2

Lösung:

Ansatzfkt.:

$$R_R = R_1 + R_2 = f(R_1, R_2)$$

NB:

$$R_\parallel = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad \text{bzw.} \quad R_\parallel^{-1} = R_1^{-1} + R_2^{-1}$$

$$R_1^{-1} = R_\parallel^{-1} - R_2^{-1}$$

$$R_1 = \frac{R_\parallel R_2}{R_2 - R_\parallel}$$

Zielfunktion:

$$R_R = \frac{R_\parallel R_2}{R_2 - R_\parallel} + R_2 = f(R_2)$$

$$R_R' = f'(R_2) = \frac{R_\parallel(R_2 - R_\parallel) - (R_\parallel R_2)\cdot 1}{(R_2 - R_\parallel)^2} + 1$$

$$R_R' = f'(R_2) = \frac{90(R_2 - 90) - (90 R_2)}{(R_2 - 90)^2} + 1$$

$$R_R' = \frac{-8100}{(R_2 - 90)^2} + 1$$

R_R'' mit $-\frac{v'}{v^2}$!

n.B.:

$$0 = 90(R_2 - 90) - 90R_2 + (R_2 - 90)^2$$

$$0 = 90R_2 - 8100 - 90R_2 + R_2^2 - 180R_2 + 8100$$

$$0 = R_2^2 - 180 R_2 \quad \Rightarrow \quad R_{2_1} = 0\,\Omega$$

$$0 = R_2 - 180 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{R_{2_2} = 180\,\Omega}}$$

$$R_R'' = f''(R_2) = -\frac{-8100 \cdot 2(R_2 - 90)^1 \cdot 1}{(R_2 - 90)^4} + 0$$

$$= \frac{16200}{(R_2 - 90)^3}$$

h.B.: $f''(0) < 0 \Rightarrow$ Max!

$f''(180) > 0 \Rightarrow \underline{\underline{\text{Min}}}$

Ergebnis: $\underline{\underline{R_1 = R_2 = 180\,\Omega}}$

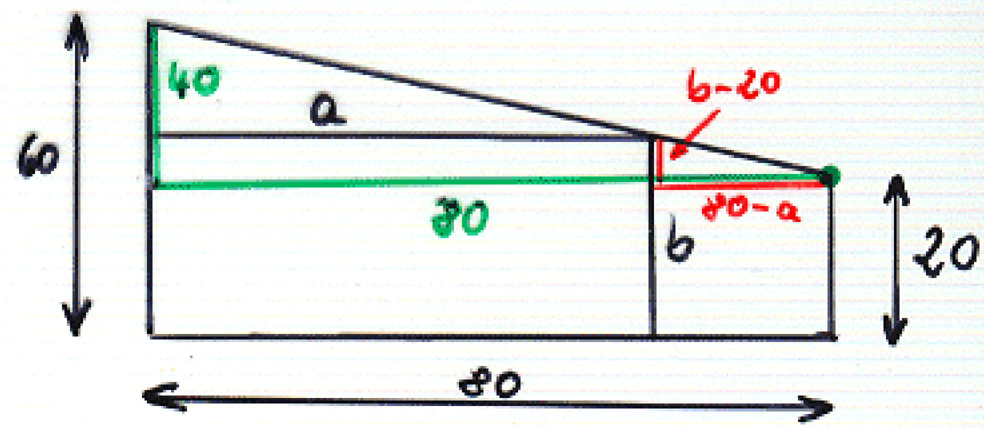
zu 3.)

Analyse:

geg.: Kantenlängen 60/80/20 des Trapezes

$A \to Max$

ges.: a, b des Rechteckes



Ansatzfkt.:

$A = f(a,b) = ab$

Strahlensatz: $\frac{80-a}{b-20} = \frac{80}{40} \wedge a = 120 - 2b$

$A = f(b) = (120-2b) \cdot b$

$= 120b - 2b^2$

$A' = f'(b) = 120 - 4b$

n.B.: $0 = 120 - 4b \wedge \underline{\underline{b = 30\,cm}}$

$A'' = f''(b) = -4$

h.B.: $f''(30) = -4 < 0 \wedge$ Max.

$a = 120 - 2 \cdot 30 = \underline{\underline{60\,cm}}$

Für die Seitenlängen 30cm u. 60cm besitzen die Rechtecktafeln max. Flächeninhalt.

zu 4)

a) $\overline{AC} + \overline{CB} = 5{,}1\ \mathrm{Km} \Rightarrow 5{,}1 \cdot 40\ \mathrm{TM} = \underline{\underline{204\ \mathrm{TM}}}$

b) $\overline{AB} = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{CB}^2} = 3{,}9\ \mathrm{Km} \Rightarrow 3{,}9 \cdot 50\ \mathrm{TM} = \underline{\underline{195\ \mathrm{TM}}}$

c) Extremwertproblem:

geg.: $\overline{AC}, \overline{CB}$

Kosten $K \to \mathrm{Min}$

ges.: $\overline{DC} = x,\ K$ $\qquad DB = \{x;\ 0 \leq x \leq 3{,}6\}$

Ansatzfkt.:

$$K = f(\overline{AD}, \overline{DB}) = 40\,\overline{AD} + 50\,\overline{DB}$$

$$\overline{AD} = \overline{AC} - x = 3{,}6 - x \quad ; \quad \overline{DB} = \sqrt{\overline{BC}^2 + x^2} = \sqrt{1{,}5^2 + x^2}$$

Zielfkt.:

$$K = f(x) = 40(3{,}6 - x) + 50\sqrt{1{,}5^2 + x^2}$$

$$K = f(x) = 144 - 40x + 50\sqrt{2{,}25 + x^2}$$

$$K' = f'(x) = -40 + \frac{50x}{\sqrt{2{,}25 + x^2}}$$

$\Rightarrow$ not. B.: $f'(x) = 0$

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{x_1 = 2\ ;\ x_2 \text{ entfällt}}}$

$$K'' = f''(x) = \frac{50\sqrt{2{,}25 - x^2} - 50x \cdot \frac{x}{\sqrt{2{,}25 + x^2}}}{2{,}25 + x^2}$$

$\Rightarrow$ hin. B.: $f''(2) > 0$

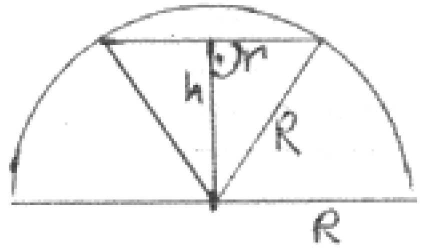
$\Rightarrow$ $\underline{\underline{\text{Minimum}}}$

$$\underline{K = f(2) = 189\ \mathrm{TM}}$$

Für $\overline{DC} = 2$ Km werden die Kosten minimal.

zu 5.)

Skizze:



geg.:

R

$V_{Kegel} \rightarrow Max$

ges.:

r, h, V_{Kegel} in Abhängigkeit von R

Ansatz

~~Ziel~~funktion:

$$V_{Kegel} = f(r, h) = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h$$

NB:

$$R^2 = r^2 + h^2 \rightarrow r^2 = R^2 - h^2$$

Ziel

~~Haupt~~fkt.:

$$V_{Kegel} = f(h) = \frac{1}{3}\pi \cdot (R^2 - h^2) \cdot h$$

$$f(h) = \frac{1}{3}\pi R^2 h - \frac{1}{3}\pi h^3$$

$$V'_{Kegel} = f'(h) = \frac{1}{3}\pi R^2 - \pi h^2$$

n.B.:

$$0 = \frac{1}{3}\pi R^2 - \pi h^2 \quad | : \pi$$

$$0 = \frac{1}{3} R^2 - h^2$$

$$h_E = \sqrt{\frac{1}{3}}\, R = \frac{1}{3}\sqrt{3}\, R$$

$$V''_{Kegel} = f''(h) = 0 - 2\pi h$$

h.B.:

$$f''\left(\frac{1}{3}\sqrt{3} R\right) = -2\pi \cdot \frac{1}{3}\sqrt{3} R < 0 \rightarrow Max$$

Ergebnisse:

$$r^2 = R^2 - h^2$$

$$r^2 = R^2 - \frac{1}{3} R^2$$

$$r^2 = \frac{2}{3} R^2$$

$$r = \sqrt{\frac{2}{3}}\, R$$

$$V_{Kegel} = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot \frac{1}{3}\sqrt{3} R - \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{1}{3^3}$$

$$V_{Kegel} = \frac{1}{9}\sqrt{3}\,\pi R^3 - \frac{1}{27}\sqrt{3}\,\pi R^3$$

$$V_{Kegel} = \frac{2}{27}\sqrt{3}\,\pi R^3$$

6.

geg.: V

ges.: r, h

Ziel: $A_M \to Min$

Ansatz: $A_M = f(r,s) = \pi r s$

NB: $s^2 = h^2 + r^2$; $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \Rightarrow r^2 = \frac{3V}{\pi h}$

$s^2 = h^2 + \frac{3V}{\pi h}$

$$A_M = f(h) = \pi \cdot \sqrt{\frac{3V}{\pi h}} \cdot \sqrt{h^2 + \frac{3V}{\pi h}}$$

Wenn $A_M \to Min$, dann $A_M^2 \to Min$

$\Rightarrow$ Zielfkt.: $A_M^2 = f(h) = \pi^2 \cdot \frac{3V}{\pi h} \cdot \left(h^2 + \frac{3V}{\pi h}\right)$

$$A_M^2 = f(h) = 3V\pi h + 9V^2 \cdot \frac{1}{h^2}$$

$$(A_M^2)' = f'(h) = 3V\pi - 18V^2 \cdot \frac{1}{h^3}$$

n.B.:

$$0 = 3V\pi h^3 - 18V^2$$

$$h^3 = \frac{6V}{\pi}$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{6V}{\pi}}$$

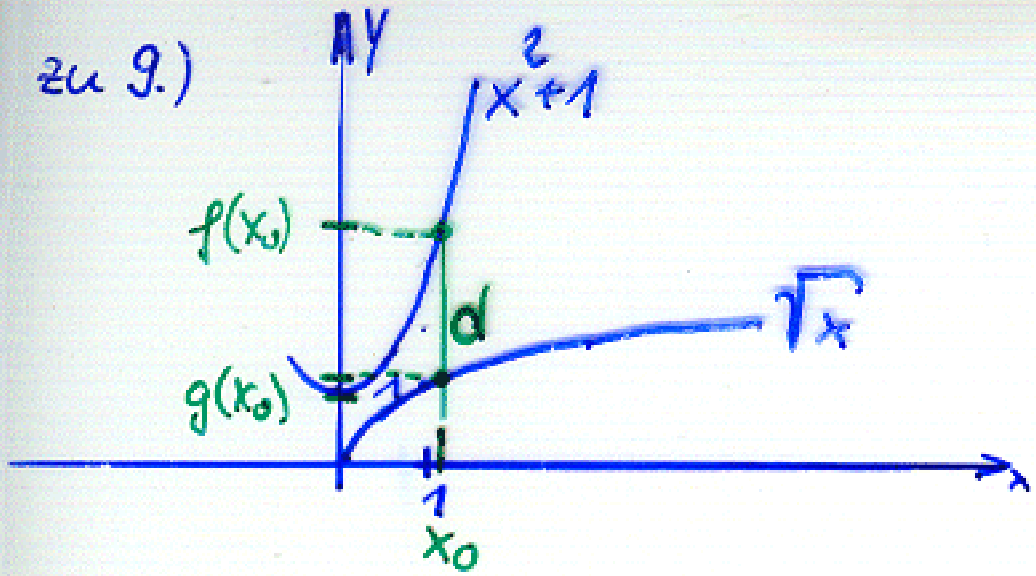
$$(A_M^2)'' = f''(h) = 54V^2 \cdot \frac{1}{h^4}$$

h. B.: $f''\left(\sqrt[3]{\frac{6V}{\pi}}\right) = 54V^2 \cdot \frac{1}{\left(\sqrt[3]{\frac{6V}{\pi}}\right)^4} > 0 \Rightarrow Min$

Weitere Berechnungen:

$$r = \sqrt[6]{\frac{9V^2}{2\pi^2}}$$

zu 9.)



geg.: $d \Rightarrow$ Min

ges.: x_0

Ansatzfkt.: (= Zielfkt.)

$d = h(x) = f(x) - g(x)$

$d = h(x) = x^2+1 - \sqrt{x}$

$d' = h'(x) = 2x - \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$d'' = h''(x) = 2 + \frac{1}{4\sqrt{x^3}}$

n.B.: $0 = 2x - \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$0 = 4x\sqrt{x} - 1$

$\frac{1}{4} = \sqrt{x^3} \qquad |(\,)^2$

$\frac{1}{16} = x^3$

$\underline{x_0 = \sqrt[3]{\frac{1}{16}} \approx 0{,}4}$

h.B.: $h''\left(\sqrt[3]{\frac{1}{16}}\right) = 2 + \frac{1}{4\sqrt{\frac{1}{16}}} = 3 > 0$

$\underline{\hat{=}\ \text{Min}}$

$h\left(\sqrt[3]{\frac{1}{16}}\right) = \left(\sqrt[3]{\frac{1}{16}}\right)^2 + 1 - \sqrt{\sqrt[3]{\frac{1}{16}}}$

$\underline{\underline{\approx 0{,}53 \text{ LE}}}$