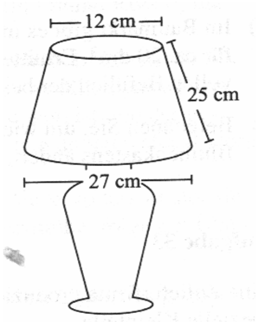
1. Prüfungskomplex - Mathematik Schuljahr 2008/09
Wiederholung Grundwissen Klassen 8/9/10

Abgabetermin 22.09.08

Alle Aufgaben sollen sowohl mit CAS als auch ohne durchgerechnet werden.

1. Eine alte Lampe soll mit einem neuen Lampenschirm aufgepeppt werden. Der Lampenschirm hat die Form eines geraden Kegelstumpfes. Fertigen Sie eine maßstabsgerechte Zeichnung der Schirmfläche. Berechnen Sie alle Größen, die für das Anfertigen des Schirmes benötigt werden.



(Skizze nicht maßstabsgetreu)

2. Vereinfache die Terme!

a) $\sqrt{x^2+16}$ b) $\sqrt{x^2\cdot 16}$ c) $\sqrt{\frac{x^2}{16}}$ d) $\sqrt{x^2-16}$

e) $\lg(2a)+2\lg(a)-\lg(a^2)-\lg(a^{-1})$ f) $\lg(\sqrt{x})+\lg(\sqrt{4x})-\lg(0{,}5x^2)-\lg(4)$

g) $(\sqrt{x}\sqrt{y}):(\sqrt{xy})\cdot(\sqrt{x^2y^3})$

h) $\sqrt{\frac{x^2y^2z^2}{16}}\cdot\left(\sqrt{\frac{4x}{5z^2}}:\sqrt{\frac{5}{x^3}}\right)$ i) $\sqrt{\frac{x^2}{4}+\frac{1}{9}x+\frac{1}{81}}$

j) $(c-\sqrt{b})(c-\sqrt{b})$ k) $(5x^2)^{\frac{3}{2}}(10x)^2$

l) $(a^{n+3}-3a^n-a^{n-3}):a^{-3}$

m) $\frac{3x^{-2}y}{2a^2b}:\frac{x^4y^{-3}}{6ab^2}$ n) $\frac{p^3q^{-2}}{r^{-4}s^{-5}}:\frac{r^{-6}s^{-1}}{p^{-1}q^2}$ o) $\frac{(ab)^{-2}}{x^2y^{-1}}\cdot\frac{(xy)^2}{a^3b}$

3. Führe eine Polynomdivision durch!

a) $(x^4+2x^3+4x-1):(x^2+2)$ b) $(x^{n+2}+x^{n+1}-2x^2-2x):(x^n-2)$

4. Faktorisiere!

a) x^2-16 b) $y^{10}+8y^5+16$ c) $4x^4+9x^2+2$ d) x^3+5x^2-6x

5. Löse folgende Gleichungen ohne GTR! Beachte bei Aufgabe e) den Definitionsbereich der Gleichung!

a) $2^{x+1}\cdot 4^{2x-2}=8^x$ b) $10\cdot 5^{3x-1}=2\cdot 5^{x+1}$ c) $\lg(5-4x)=\lg(1+4x)$

d) $\lg(x)=2\lg(x)+\lg(1+x)$ e) $(x^2-5x-9)^{0{,}5}=(4x+1)^{0{,}5}$

6. In einem Unternehmen wird auf drei Maschinen ein und dasselbe Erzeugnis hergestellt. Die Maschinen I und II produzieren je 20 % der Gesamtproduktion, die Maschine III produziert 60 % der Gesamtproduktion. Es ist bekannt, dass die Maschine I 3% Ausschuß, die Maschine II 5 % Ausschuß und die Maschine III 4% Ausschuß produziert. Die hergestellten Erzeugnisse werden in einem Lager gesammelt.

a)Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein im Lager zufällig ausgewähltes Erzeugnis ein Ausschußstück?
b)Mit welcher Wahrscheinlichkeit wurde ein solches Ausschußstück auf Maschine I produziert?
c)Für eine Untersuchung wird ein Ausschußstück benötigt, das auf Maschine III gefertigt wurde. Wie viele Erzeugnisse von Maschine III müssen der laufenden Produktion entnommen werden, damit sich mit mindestens 99% Wahrscheinlichkeit wenigstens ein Ausschußstück unter ihnen befindet?

Fachbereich Mathematik
Bernhard-von-Cotta-Gymnasium Brand-Erbisdorf **Abgabetermin: 06.10.2008**

2.Prüfungskomplex-Ma-Leistungskurs 2008/09; Grenzwerte von Zahlenfolgen und Funktionen

Wiederholen Sie!
-Begriffe Zahlenfolgen: Schranken, Grenzen und Grenzwert/konvergent und divergent/ rekursive und explizite Zuordnungsvorschrift.

-Begriffe Funktionen: Grenzwerte $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ bzw. $\lim\limits_{x \to \pm\infty}$ f(x) und deren grafische Bedeutung
Stetigkeit an einer Stelle, im Intervall und im Definitionsbereich

---

1. Gegeben ist $(a_n) = \left(\frac{3n+21}{2n-1}\right)$ n≥1

a) Stellen Sie die ersten 5 Glieder der Zahlenfolge(ZF) grafisch dar.
b) Weisen Sie nach, dass die Zahl 2,5 kein Glied der ZF ist.
c) Zeigen Sie, dass 2 keine Schranke der ZF ist.
d) Geben Sie die obere Grenze und eine untere Schranke an.
e) Untersuchen Sie die ZF auf Konvergenz.
f) Überprüfen Sie, ob die ZF arithmetisch oder geometrisch ist.

2. Berechnen Sie!

a) $\sum\limits_{i=1}^{7} 2^i$ b) $\sum\limits_{k=2}^{10}(k-3)$ c) $\sum\limits_{n=1}^{4} n^3 + \sum\limits_{n=5}^{8} n^3 - \sum\limits_{n=1}^{8} n^3$
d) die Summe aller ungeraden Zahlen kleiner als 400(lösen Sie mit Hilfe des TW)

3. Stellen Sie folgende Summe mit Hilfe des Summenzeichens dar und berechnen Sie.
180+130+80+30+...-820=

4. Berechnen Sie die Grenzwerte für die entsprechende Stelle x_0 und geben Sie deren grafische Bedeutung an.

a) $f(x)=x^2+3x+2$; $x_0=0$ b) $f(x)=\frac{2x+x^2}{x}$; $x_0=0$ c) $f(x)=\sqrt{x^2-4}$ $x_0=2$

d) $f(x)=\begin{cases} x^2-1; \textit{ für } & x<1 \\ \lg x; \textit{ für } & x>1 \end{cases}$; $x_0=1$ e) $f(x)=\left(\frac{x^2-x-6}{x+2}\right)^3$; $x_0=-2$

5. Ermitteln Sie (falls vorhanden) waag., senkr. und schräge Asymptoten.

a) $f(x)=\frac{x^2+2x-3}{x-1}$ b) $f(x)=\frac{3x^2-2x-1}{x^2-x-2}$ c) $f(x)=3^{-x}\cdot 4^x$ d) $f(x)=\frac{x^2+2x+1}{4x-4}$

e) $f(x)=\frac{x^2+3x+2}{x^2-2x-3}$ f) $f(x)=\frac{x^3-x^2-2x}{(x-1)^2}$

Fachbereich Mathematik
Bernhard-von-Cotta-Gymnasium Brand-Erbisdorf **Abgabetermin: 06.10.2008**

6. Untersuchen Sie, ob f(x) and der Stelle x_0 stetig ist. Begründen Sie.

a) $f(x)=\sqrt[3]{x^2-1}; x_{01}=1; x_{02}=-1$ b) f(x)=$\sqrt{x+1}; x_{01}=-1; x_{02}=-2; x_{03}=4$

c) $f(x)=\begin{cases} x^2;\ \mathit{für} & x\le 1 \\ \sqrt{x};\ \mathit{für} & x>1 \end{cases}\ ; x_0=1$

7.Bestimmen Sie $t\in$ R so, dass f(x) in R stetig ist.

f(x)=$\begin{cases} -x^2+2x-1;\ \mathit{für} & x\le 1 \\ tx+1\ ;\ \mathit{für} & x>1 \end{cases}$

8. Weisen Sie nach, dass die Funktion f(x) in R stetig ist.

f(x)=$\begin{cases} \dfrac{\sin(2x)}{x}; & x\ne 0 \\ 2\ ; & x=0 \end{cases}$ Hinweis: Es gilt $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

Wiederholungskomplex 03
Thema: Differenzierbarkeit von Funktionen

Termin: 06.10.2008

1. Wiederholen Sie die Begriffe:„Differenzenquotient“, „Differentialquotient“, erste Ableitung bzw. zweite Ableitung einer Funktion f an einer Stelle x_0 und deren graphische Deutung!

---

2. Stellen Sie den Differentialquotienten an der Stelle x_0 für folgende Funktionen auf!

A) $f(x) = x^3$ B) $f(x) = e^x$ C) $f(x) = \sin x$

---

3. Untersuchen Sie die Grenzwerte für $h \longrightarrow 0$ der folgenden Terme, indem Sie für h Folgen von Zahlen einsetzen, die von „links“ bzw. „rechts“ gegen 0 streben.
Fertigen Sie kleine Wertetabellen an!

A) $\dfrac{e^h - 1}{h}$ B) $\ln\left(1 + \dfrac{h}{2}\right)^{\frac{2}{h}}$ C) $\dfrac{\cosh - 1}{h}$

---

4. Bilden Sie mit Hilfe der Ableitungsregeln die erste und zweite Ableitungsfunktion folgender Funktionen (a$\in$R , x$\in D_f$)!

$f_1(x) = x^7 - ax^4 + \dfrac{a}{x}$ $f_2(x) = \dfrac{a}{(x-2)^2}$

$f_3(x) = e^{2-x} + 2x^a$ $f_4(x) = e^x x^2$

$f_5(x) = 2\cos(x - \dfrac{\pi}{2}) + \dfrac{1}{3}\sin(3x+3)$ $f_6(x) = \dfrac{1}{x} + ax - \sqrt{ax}$

Überprüfen Sie die erhaltenen Ableitungsfunktionen mit dem ClassPad!

---

5. Berechnen Sie das lokale Extrema und die Wendepunkte der Funktion $f(x) = e^{-x^2}$ ohne Näherungswerte zu benutzen!

---

6. In einer Schokoladenfabrik sollen Pralinen in Schachteln mit quadratischer Grundfläche verpackt werden. Jede Schachtel ohne Deckel soll aus einem 100 cm^2 großen Stück Pappe gefertigt werden. Welche Kantenlänge hat diejenige Schachtel mit dem größten Volumen?

Viel Freude bei der Bearbeitung dieser Aufgaben!

4. Prüfungskomplex Mathe- Leistungskurs 2008/09 – Integralrechnung

Termin : 11.11.08

Alle Aufgaben sollten, wenn möglich, sowohl mit als auch ohne CAS durchgerechnet werden!

1. Wiederholen Sie die Begriffe „Stammfunktion" , „unbestimmtes Integral", „bestimmtes Integral" und „uneigentliches Integral"! Ordnen Sie diese Begriffe den folgenden Aufgaben zu und ermitteln Sie die Integrale !

a) $\int (t^3+1) \cdot t^2 \, dt$ b) $\int \frac{-1}{3x\sqrt{x}} \, dx$ c) $\int \frac{3x}{6x^2-8x} \, dx$

d) $\int_{-1}^{0} \left(\sqrt[3]{(2x+5)^2}\right) dx$ e) $\int_0^{\pi} (\sin^2 x) \, dx$ f) $\int_0^{\pi} \left(\sin \frac{\pi}{2} + 1\right) dx$

g) $\int \frac{x}{\sqrt{1-3x}} \, dx$ h) $\int \left(x\sqrt{1+x^2}\right) dx$ i) $\int_{-\infty}^{-1} \frac{4}{x^5} \, dx$

j) $\int \left(e^{3x-1}\right) dx$ k) $\int (e^x)^2 \, dx$ l) $\int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{x}} \, dx$

2) Berechnen Sie a (a>1) so, dass $\int_1^a \frac{1}{3x-1} \, dx = 0{,}1$.

3) Zeigen Sie rechnerisch, dass $F_a(x) = e^{ax}\left(\frac{2x-1}{a} - \frac{2}{a^2}\right)$ eine Stammfunktion von f_a mit $f_a(x) = (2x-1)\, e^{ax}$ $(a \in R_+)$ ist.

4) Welche Parabel K : $y = c - x^2$ $(c > 0)$ schließt mit der x- Achse eine 2 FE große Fläche ein ?

5) Der Graph einer Funktion f mit $f(x) = ax^3+bx^2+cx$ hat bei x=1 einen Hochpunkt, bei x=2 einen Wendepunkt und schließt mit der x-Achse eine Fläche ein, deren Inhalt 9 FE beträgt. Ermitteln Sie f rechnerisch.

6) Von welcher Funktion f ist $F(x) = \sqrt{x^2+1}$ eine Stammfunktion? Berechnen Sie den Inhalt der Fläche im 1.Quadranten, die von f, einer Asymptote und den Geraden g: x=0 und h: x=z (z>0) begrenzt wird. Untersuchen Sie, ob dieser Flächeninhalt für $z \to \infty$ einen Grenzwert hat!

7) Der Graph der Funktion f_k mit $f_k(x) = k\sqrt{x} - 3x$ und die x – Achse begrenzen eine Fläche.
   a) Berechnen Sie den Inhalt. Für welchen Wert von k ergibt sich der Inhalt 8 FE ?
   b) Die Fläche mit 8 FE rotiert um die x – Achse . Welchen Rauminhalt hat der entstehende Rotationskörper ?

8) Für jedes t > 0 ist eine Funktion f_t gegeben durch $f_t(x) = \left(\frac{x}{t} + 1\right) \cdot e^{t-x}$; $x \in R$.
   a) Zeichnen Sie die Graphen von f_1 und der Ableitungsfunktion f_1' im Bereich [-1 ; 4] in ein gemeinsames Koordinatensystem. (1 LE =1cm)
   b) Zeigen Sie , dass für jedes t > 0 das Schaubild von f_t mit dem Schaubild von f_t' genau einen Punkt gemeinsam hat .
   c) Die Graphen von f_t und f_t' schneiden aus der Geraden g : x = 1 eine Strecke aus . Für welchen Wert von t ist die Länge dieser Strecke am kleinsten ?
   d) Das Schaubild K_1 , die x –Achse und die Gerade g : x = u mit u > -1 schließen eine Fläche ein . Berechnen Sie deren Inhalt A(u) und $\lim_{u \to \infty} A(u)$.

5. Prüfungskomplex - Mathematik Schuljahr 2008/09
Tangenten, Sekanten, Normalen

Abgabetermin
25.11.08

Hinweis: Alle Aufgaben sind so konzipert, dass sie auch ohne CAS, jedoch nicht immer ohne GTR lösbar sind. Versuchen Sie zunächst, die Aufgaben ohne CAS zu lösen.

1. Gegeben sei die Funktion $f(x) = x^3 - 2x + 1$.
   a) Welchen Anstieg hat die Tangente an den Graph von f im Punkt $P(-2 \mid f(-2))$?
   b) Geben Sie eine Gleichung der Tangente an!
   c) Ermitteln Sie die Schnittpunkte der Tangente mit den Koordinatenachsen!
   d) Welchen Winkel bildet die Tangente mit der positiven x-Achse?
   e) An welcher Stelle hat f den Anstieg 4?

2. Gegeben sei die Funktion $f(x) = 1/x$.
   a) Berechnen Sie den Anstieg der Sekante s des Graphen von f durch die Punkte $P_1(0{,}25 \mid f(0{,}25))$ und $P_2(4 \mid f(4))$!
   b) Bestimmen Sie diejenigen Punkte P_i *(i=3,4,...)* des Graphen von f, in denen der Tangentenanstieg mit dem Sekantenanstieg von s übereinstimmt!
   c) Geben Sie für die Punkte P_i jeweils eine Tangentengleichung an!

3. Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente und der Normalen im Punkt $Po(2{,}25 \mid f(2{,}25))$ für die Funktion f (x) mit der Gleichung
$$f(x) = \frac{1}{x} - \sqrt{x} + 1$$

4. a) Berechnen Sie die von $0(0|0)$ verschiedenen Schnittpunkte Sl und S2 des Schaubildes von $f(x) = x^3 - 2x$ mit der Normalen in $0(0|0)$.
   b) Zeigen Sie: Die Tangenten in Sl und S2 sind parallel!

5. a) Zeichnen Sie die Funktionen $f(x) = x^2$ und $g(x) = 0{,}5 - x^2$ in ein Koordinatensystem! Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte beider Funktionen!
   b) Zeige: In einem Schnittpunkt ist die Tangente an f gleichzeitig Normale von g und umgekehrt.
   c) Es gibt noch weitere Funktionen der Form $f_t(x) = tx^2$ und $g_t(x) = 0{,}5 - sx^2$, deren Schaubilder die in b) genannte Eigenschaft haben. Welche Bedingung müssen die Zahlen t und s erfüllen, damit dies der Fall ist?

6. Gegeben sei die Funktion $f(x) = -0{,}5x - 2$. Bestimmen Sie eine Gleichung für die Tangente an die Parabel $y=x^2+x+1$, die dem Graph von f parallel ist!

7. Weisen Sie nach, dass für die Funktion f mit $f(x) = 0{,}5(x^2 + 2x + 2)$ folgende Differentialgleichung gilt: $1+(f')^2 = 2 f f''$!

8. Für jede Zahl $a \in R$ ist durch $f_a(x) = x^3 + 0{,}5ax^2 + (a+1)x$ eine Funktion f_a und ein Schaubild K_a gegeben.
   a) Es gibt zwei Punkte, die auf allen Kurven K_a liegen. Gib ihre Koordinaten an.
   b) Zeige: Es gibt eine Stelle x_o, für welche die Tangenten aller Kurven K_a parallel sind. Gib x_o und die Steigung der Tangenten an.
   c) Für welche a-Werte schneidet K_a die 2. Winkelhalbierende dreimal, zweimal, einmal?
   d) Skizziere die Kurvenschar (K_{-1}, K_o, K_1, K_2 und K_3)

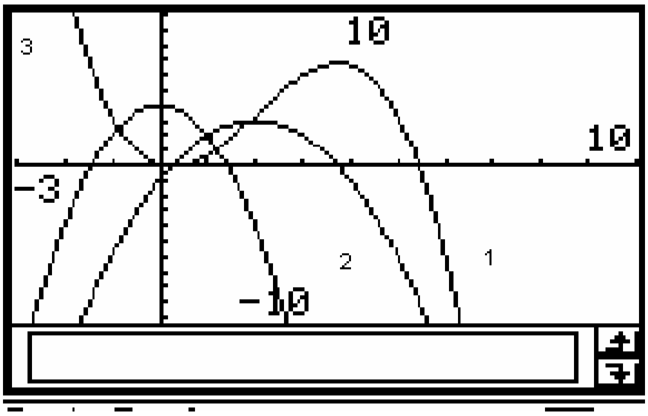
Fachbereich Mathematik
Bernhard-von-Cotta-Gymnasium Brand-Erbisdorf

6.Prüfungskomplex-Ma-Leistungskurs 2008/09; Ganzrationale und gebrochenrationale Funktionen

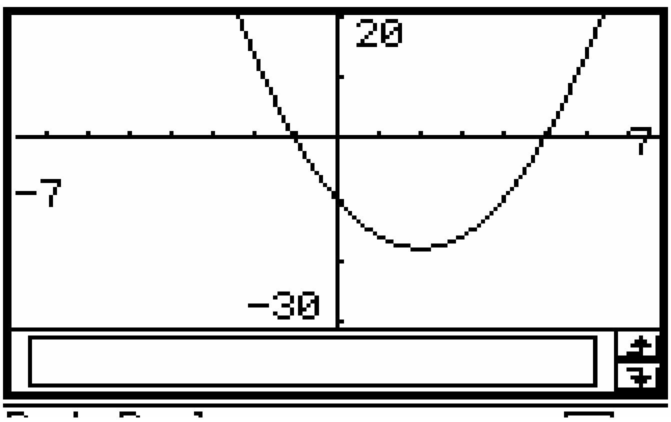
1. Wiederholen Sie, wie sich folgende Eigenschaften von Funktionen untersuchen lassen: Definitions- und Wertebereich, Nullstellen, Schnittpunkt mit der y– Achse, Verhalten im Unendlichen, Asymptoten, Symmetrie, Monotonie, Extrem –und Wendepunkte.
   Welche Besonderheiten ergeben sich für ganzrationale und gebrochenrationale Funktionen?

2. Begründen Sie unter der Verwendung von Funktionseigenschaften. Wie viele Nullstellen, Extrema bzw. Wendepunkte kann ein Polynom 3.Grades minimal/ maximal besitzen.

3. In der folgenden Abb. sind die Graphen einer Funktion f, einer ihrer Stammfunktionen F und einer weiteren Funktion dargestellt. Geben Sie an, welche der drei Kurven (1,2 oder 3) den Graphen von f und welche den Graphen von F darstellt.



4. In der folgenden Abb. ist der Graph f'(x) einer Funktion f(x) gegeben. Geben Sie für f(x) folgendes an und begründen Sie.
   Extrem- und Wendestellen, Monotonieverhalten
   Begründen Sie, warum sich aus dem Graph von f'(x) (nicht) eindeutig der Graph von f(x) herleiten lässt.



5. Geben Sie eine Funktion an, die
   a) ganzrational vom Grad 2 ist und genau ein lokales Maximum besitzt.
   b) ganzrational vom Grad 4 ist und genau ein lokales Minimum besitzt.

Fachbereich Mathematik
Bernhard-von-Cotta-Gymnasium Brand-Erbisdorf

6. Beweisen Sie für ganzrationale Funktionen f:
   a) Ist f vom Grad 2, so hat f genau eine Extremstelle
   b) Eine ganzrationale Funktion vom Grad n hat höchstens n-1 Extremstellen.

7. Die Steighöhe h eines im luftleeren Raum senkrecht nach oben geworfenen Gegenstandes lässt sich durch folgendes h - t – Gesetz beschreiben:

$$h(t) = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \quad v_0 \ \ in \ \ \frac{m}{s}, t \ \ in \ \ s, g = 9{,}81 \frac{m}{s^2}$$

Dabei ist v_0 die Abwurfgeschwindigkeit.
   a) Berechnen Sie die maximal erreichte Höhe des Gegenstandes für v_0 = 12m/s.
   b) Wie lange dauert es, bis der Gegenstand wieder die Ausgangshöhe erreicht?

8. Bestimmen Sie alle ganzrationalen Funktionen 3.Grades, deren Graph
   a) punktsymmetrisch zum Ursprung ist und für x = 2 einen Extrempunkt hat.
   b) im Ursprung einen Wendepunkt mit der Wendetangente y = x hat.

9. Gegeben ist eine Funktionenschar f_t. Für welchen Wert von t wird die y- Koordinate des Minimums am kleinsten?

$$f_t(x) = x + \frac{t^2}{x} + \frac{8}{t} \quad t \in R; t \neq 0$$

10. Ein Patient wird mit Fieber in ein Krankenhaus eingeliefert und behandelt. Die Temperaturkurve wird durch die Funktion $\vartheta(t)$ modelliert:

$$\vartheta(t) = -\frac{1}{16} t^4 + \frac{7}{12} t^3 - \frac{15}{8} t^2 + \frac{9}{4} t + 39 \quad t \in [0;5] \ \ in \ \ Tagen; \ \vartheta \text{ in °C}$$

   a) Welche Temperatur hat der Patient bei der Einlieferung ins Krankenhaus? Wann wird die höchste Temperatur gemessen? Wie hoch ist diese? Welcher Wert ergibt sich am 5.Tag?

   b) Interpretieren Sie den Verlauf der Fieberkurve.

11. An einem Tag im Frühherbst wird die Oberflächentemperatur ϑ_o eines Sees gemessen. Der Temperaturverlauf wird durch die Funktion ϑ_o modelliert:

$\vartheta_o(t) = -\frac{1}{300}\left(t^3 - 36t^2 + 324t - 5700\right) \quad t \in (0;24] \ \ in \ \ Stunden; \ \vartheta_o$ in °C. Berechnen Sie den Wendepunkt des Graphen und die Steigung der Wendetangente und deuten Sie diese für den See.

12. Gegeben ist die Funktionenschar f_t mit $f_t(x) = \frac{2x^2 - (2t+1)x}{x - t}$. Welche Asymptoten hat diese Schar?

Fachbereich Mathematik
Bernhard-von-Cotta-Gymnasium Brand-Erbisdorf

13. Weisen Sie nach, dass jede der Funktionen f_a mit
$f_a(x) = \frac{ax^2 - 2ax - x + 4}{2ax - 2}$ dieselbe schräge Asymptote besitzt und geben Sie deren Gleichung an.

14. Durch das Einwirken giftiger Substanzen kommt es in einem Teich zu einem starken Absinken des Sauerstoffgehalts, der unter normalen Bedingungen 12mg/l beträgt. Danach erhöht sich dann aber durch Selbstreinigung der Sauerstoffgehalt wieder. Messungen ergaben die Werte siehe Tabelle. Das Absinken und das anschließende Ansteigen des Sauerstoffgehaltes kann näherungsweise beschrieben werden durch:
$f(t) = \frac{at^2 + bt + c}{t^2 + d}$ $\quad t \geq 0$ (t in Tagen, f(t) in mg/l).

a) Berechnen Sie die Konstanten a, b, c, und d.
b) Zeichnen Sie den Graphen einschließlich der Asymptote [0;14].
c) Nach wie vielen Tagen beträgt der Sauerstoffgehalt wieder 90% des normalen Wertes?

Abgabetermin: 08.12.2008

Wiederholungskomplex 7 Termin: 06.01.2009	Thema: Exponential- und Logarithmusfunktion

1. Wiederholen Sie die Eigenschaften der natürlichen Exponentialfunktion $y = f(x) = e^x$ und der natürlichen Logarithmusfunktion $y = f(x) = \ln x$! (Klasse 10; Lernbereich 4)

---

2. Bilden Sie jeweils die erste Ableitung der Funktionen f ohne CAS!
Kontrollieren Sie Ihre Ableitungen mit CAS!

A) $f(x) = e^x$ B) $f(x) = 3e^{-x}$ C) $f(x) = \frac{1}{x^2} \cdot e^x$

D) $f(x) = \ln x$ E) $f(x) = 3\ln x$ F) $f(x) = x^3 + \ln x^3$

---

3. Bilden Sie jeweils die Menge aller Stammfunktionen der Funktionen f ohne CAS!
Kontrollieren Sie Ihre Stammfunktionen mit CAS!

A) $f(x) = e^x$ B) $f(x) = 3e^{-x}$ C) $f(x) = e^{4-2x}$

D) $f(x) = \frac{1}{x}$ E) $f(x) = \frac{3}{x}$ F) $f(x) = \frac{4}{5-2x}$

---

4. Für jedes a ($a \in R$; $a > 0$) ist eine Funktion f_a durch

$$f_a(x) = (2x-1) \cdot e^{ax} \quad (x \in D_{f_a})$$

gegeben.

a) Geben Sie den größtmöglichen Definitionsbereich der Funktion f_a an.
Ermitteln Sie die Koordinaten der Schnittpunkte des Graphen der Funktion f_a mit den Koordinatenachsen und die Koordinaten der lokalen Extrempunkte (einschließlich der Art der Extrema).
Die Graphen der Funktionen
f_{a_1} und f_{a_2} ($a_1, a_2 \in R$; $a_1, a_2 > 0$; $a_1 \neq a_2$)
besitzen gemeinsame Punkte.
Zeigen Sie, dass genau zwei solcher Punkte existieren.
Geben Sie eine Gleichung der achsenparallelen Asymptote und den Wertebereich der Funktion f_a an. (13 BE)

b) Zeigen Sie, dass für jedes a der Graph der Funktion f_a genau einen Wendepunkt besitzt.
Ermitteln Sie eine Gleichung der Funktion g, auf deren Graph alle diese Wendepunkte liegen, und geben Sie den größtmöglichen Definitionsbereich der Funktion g an. (9 BE)

c) Bestimmen Sie $\int f_a(x)\,dx$.
Geben Sie eine Gleichung derjenigen Stammfunktion F_a an, für die gilt:
$F_a(0) = 0$. (4 BE)

In den folgenden Teilaufgaben wird nur die Funktion f_2 betrachtet.

d) Für jedes b ($b \in R$; $b < 0$) begrenzen der Graph der Funktion f_2, die Koordinatenachsen sowie die Gerade mit der Gleichung $x = b$ eine Fläche vollständig.
Berechnen Sie den Inhalt A(b) dieser Fläche.
Ermitteln Sie A(–2), A(–10) und A(–100) und geben Sie eine Vermutung für den Grenzwert
$\lim\limits_{b \to -\infty} A(b)$ an. (4 BE)

e) Der Graph der Funktion f_2, die Koordinatenachsen und die Gerade mit der Gleichung $x = -1$ begrenzen eine Fläche vollständig. Diese erzeugt bei Rotation um die x-Achse einen Rotationskörper.
Bestimmen Sie das Volumen dieses Rotationskörpers. (2 BE)

f) Für jedes u ($u \in R$, $u < 0$) sind der Punkt $P_u(u; f_2(u))$, der Koordinatenursprung und der Punkt $Q_u(u; 0)$ Eckpunkte eines Dreiecks.
Ermitteln Sie den Wert u, für den das zugehörige Dreieck den größten Flächeninhalt aller so gebildeten Dreiecke besitzt.
Geben Sie diesen maximalen Flächeninhalt an. (3 BE)

(35 BE)

8. Prüfungskomplex 2008/09 – Kurvendiskussion III – Winkelfunktionen

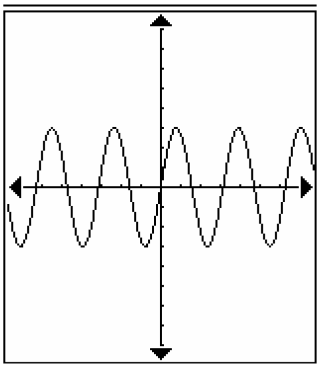
Termin : 20.01.09

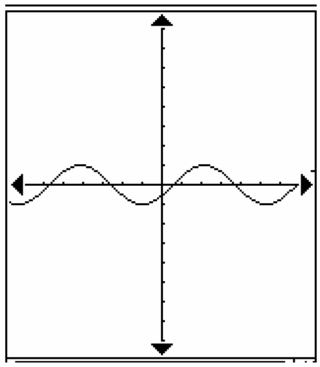
1) Wiederholen Sie folgende Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen f(x) = sin x , f(x) = cos x und f(x) = tan x : Definitions- und Wertebereich, Nullstellen , Periodizität und Symmetrie!

2) (Nutzung des CAS nur zur Kontrolle!)
Bestimmen Sie die ersten zwei Ableitungen der folgenden Funktionen. Geben Sie jeweils auch den Definitions- und Wertebereich sowie die kleinste Periode p von f an!
Wiederholen Sie dazu den Einfluss der Parameter a, b und c auf den
Verlauf des Graphen einer Funktion f(x) = a sin (bx +c) bzw. f(x) = a cos (bx + c) !
a) f(x) = 3 sin (2x) b) f(x) = - cos (π x) c) f(x) = 2 sin (4x + 2)

3) Ermitteln Sie aus dem Graphen von f eine Funktionsgleichung der Form
a) f(x) = a sin (bx) b) f(x) = a cos (x + c)

(1 LE = 1)





4) Bestimmen Sie von folgenden Funktionen im Periodenintervall [0 ; p] rechnerisch die Nullstellen, Extrem- und Wendepunkte! Skizzieren Sie f jeweils!
a) f(x) = –2 sin (2x) b) f(x) = sin (3x - π)

5) Gegeben sind die Funktionen $f_t(x)$ durch y = $f_t(x) = \frac{t^2+2}{2} \cdot \cos(tx)$; (t $\in R_+$; x $\in$ R)

a) Ermitteln Sie von f_2 rechnerisch die Nullstellen, die kleinste Periode und die Extrempunkte sowie die Art der Extrema!
Zeichnen Sie f_2 im Intervall $0 \le x \le \pi$.
Bestimmen Sie rechnerisch eine Gleichung der Tangenten an f_2 im Punkt P($\frac{\pi}{4}$; $f_2(\frac{\pi}{4})$).

b) Für jedes t begrenzen die Koordinatenachsen und der Graph von f_t im Intervall $0 \le x \le \frac{\pi}{2t}$ eine Fläche A_t vollständig. Ermitteln Sie A_t.
Für welchen Wert t wird diese Fläche minimal?
Die Fläche A_2 erzeugt bei Rotation um die x- Achse einen Rotationskörper. Bestimmen Sie sein Volumen.

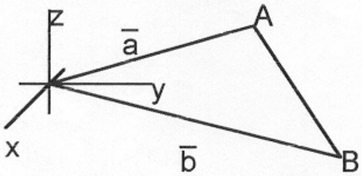
c) Gegeben sei außerdem die Funktion g(x) = 2 sin (4x) .
Weisen Sie nach, dass sich f_2 und g im Punkt S ($\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$; 0) mit k $\in$ Z schneiden.

9. Prüfungskomplex - Mathematik Schuljahr 2008/09
Vektorrechnung und Analytische Geometrie

Abgabetermin 03.02.09

1. Bestimme die Menge aller Vektoren $\overline{x}$, die zu $\overline{a} = -2\overline{i} + \overline{j} + \overline{k}$ und $\overline{b} = 7\overline{i} + 3\overline{k}$ orthogonal sind.

2. A u. B seien zwei Punkte der Ebene mit den Ortsvektoren $\overline{a}$ u. $\overline{b}$. Zeigen Sie, daß
$2(\overline{a} - \overline{b}) \circ \overline{x} = \overline{a}^2 - \overline{b}^2$
eine Gleichung der Mittelsenkrechten der Strecke $\overline{AB}$ ist.



3.a) Es sei g_k die Gerade durch A(1,-2,-4) mit dem Richtungsvektor

$\overline{a}_k = (2k+4)\overline{i} + k\overline{j} + \overline{k}$ mit k∈R.
Zeigen Sie, daß jede Gerade g_k orthogonal zur Geraden OA ist.

b) Die Geraden g_k bilden eine Ebene E. Bestimmen Sie eine Normalform und eine Parametergleichung von E.

c) Für welchen Wert von k ist g_k orthogonal zur Geraden h_k?

$$h_k:\quad \overline{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 3-4k \\ k \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie, daß g_k und h_k für keinen Wert von k parallel sind.
Berechnen Sie den Abstand $d(g_k,h_k)$ für k=0 und k=1.

d) Zeigen Sie, daß die Vektoren

$$\overline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix},\quad \overline{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix},\quad \overline{u}_k = \begin{pmatrix} 2k+4 \\ k \\ 1 \end{pmatrix}\quad \text{für jeden Wert von } k$$

linear unabhängig sind.

e) Berechnen Sie den Wert s, für welchen $\overline{u}_s$ und $\overline{u}_{-2}$ orthogonal sind.

f) Bestimmen Sie Zahlen d, e, f so, daß $\{d\overline{a},\ e\overline{u}_{-2},\ f\overline{u}_s\}$ eine Basis von R^3 bildet, welche aus paarweise orthogonalen Einheitsvektoren besteht.

4. Wir betrachten die Punkte A(1|0|0), B(0|1|0), C(0|0|1) und die Punkte P(t|0|t), Q(1-2t|t|t) mit dem Parameter t.
   a) Stellen Sie für t=0,5 Gleichungen für die Geraden BP und 0Q auf, und untersuchen Sie, ob sich diese Geraden schneiden!
   b) Für welchen Wert von t sind die Richtungsvektoren von BP und 0Q linear abhängig?
   c) Für welchen Wert von t besitzen die Geraden BP und 0Q einen Schnittpunkt? Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes!
   d) Für welches t liegt U(t|t|t) in der Ebene ABC?

5. In einem regelmäßigen Tetraeder sind alle Kanten gleich lang und alle von den Kanten eingeschlossenen Winkel gleich groß.
Beweise, daß je zwei gegenüberliegende Kanten orthogonal sind.

6. Eine an einem Mast wirkende Zugkraft werde vom Mast und zwei Spannseilen aufgenommen, wobei der Mast nur Druckkräfte in seiner Längsrichtung und die Seile nur Zugkräfte in ihrer Richtung erzeugen. Zur beschreibung wird ein kartesisches koordinatensystem eingeführt, dessen z-Achse in Mastrichtung zeigt. Der Ursprung befindet sich im Angriffspunkt der Kräfte. Die zugkraft kann durch den Vektor $\mathbf{F} = 20\mathbf{i} + 10\mathbf{j} - 15\mathbf{k}$ beschrieben werden und die Richtungen der Zugseile durch $\mathbf{a}=-\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$ bzw. $\mathbf{b}=-\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k}$.
Bestimmen Sie die Beträge der Kräfte $\mathbf{F_M}$, $\mathbf{F_{S1}}$ und $\mathbf{F_{S2}}$ im Mast und in den Seilen! (**Vektoren** ohne Pfeil, dafür **fett**)

Fachbereich Mathematik
Bernhard-von-Cotta-Gymnasium Brand-Erbisdorf

10.Prüfungskomplex-Ma-Leistungskurs 2008/09
Analytische Geometrie/Teil II

1. Gegeben sind in einem kartesischen Koordinatensystem die Punkte A(1;-2;-7), B(17;-2;5), C(-8;-2;5) und D(1;6;7).

a) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC ein rechtwinkliges Dreieck ist. Untersuchen Sie, ob es auch gleichschenklig ist. Begründen Sie, wieso es keine gleichseitige rechtwinklige Dreiecke gibt.
Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks.

b) Beschreiben Sie die besondere Lage der Ebene E(ABC) im Koordinatensystem.

c) Berechnen Sie den Abstand des Punktes D von E(ABC).

d) Berechnen Sie das Volumen der dreiseitigen Pyramide ABCD und untersuchen Sie, ob diese gerade ist.

2.a) In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte A(1;2;1),B(3;1;3), C(5;3;2) und D(3;4;0) gegeben. Weisen Sie nach, dass die Punkte A,B,C und D Eckpunkte eines Quadrates sind. Berechnen Sie den Schnittpunkt der Diagonalen.

b) Durch einen weiteren Punkt S(1,5;5,5;4,5) entsteht eine gerade quadratische Pyramide ABCDS. Die Pyramide wird von einer parallelen Ebene E_1 zur Grundfläche geschnitten, so dass das Volumen des dadurch entstehenden Pyramidenstumpfes 9,5VE beträgt. Stellen Sie für die Ebene E_1 eine Gleichung in parameterfreier Form auf.

3. In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte A(2;1;-3),B(5;-5;-1) und C(7;-2;5) gegeben.

a) Begründen Sie, warum die Punkte A,B und C Eckpunkte eines Quadrates sein können. Berechnen Sie den fehlenden Eckpunkt D. Wie viel Möglichkeiten gibt es?

b) Begründen Sie, dass der Vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ ein Normalenvektor der Ebene E(ABC) ist.

4. Gegeben sind in einem kartesischen Koordinatensystem die Ebene E: $3x - 2y + z = 7$ und der Punkt P(-1;4;8).

a) Geben Sie eine Gleichung der zu E parallelen Ebene E* durch P an.

b) Geben Sie eine Gleichung einer Geraden h an, die parallel zur Ebene E durch den Punkt P verläuft.

c) Für jedes k ist E_k mit der Gleichung: $kx + 3y + (k - 6)z = 1$ gegeben. Berechnen Sie den Wert k, für den die zugehörige Ebene E_k orthogonal zur Ebene E verläuft.

5. In einem kartesischen Koordinatensystem ist eine schiefe Pyramide ABCP mit dreiseitiger Grundfläche $\triangle$ABC gegeben. Die Grundfläche liegt in der x-y-Ebene. Die Pyramide wird außerdem durch die Ebenen E_1, E_2 und E_3 begrenzt. Die Ebenen E_1 und E_2 sind gegeben durch die nachstehenden Gleichungen :
E_1: $7x - 7y - 5z = 7$; E_2: $7x + 7y + 6z = 35$.
Die Ebene E_3 enthält die Punkte B und C und steht senkrecht zur x-y-Ebene.
Der Punkt B hat die Koordinaten (-3; -4; 0).

a. Weisen Sie nach, daß der Eckpunkt A die Koordinaten (3; 2; 0) besitzt.

b. Berechnen Sie die Koordinaten aller Punkte C_i der x-y-Ebene, für die die Dreiecke $\triangle$ ABC$_i$ rechtwinklig sind ($AB \perp AC_i$) und einen Flächeninhalt von 30 FE haben.

c. Der Punkt C (8; -3; 0) ist ein Punkt der Ebene E_3.
Ermitteln Sie eine parameterfreie Gleichung der Ebene E_3.

d. Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes P.
Berechnen Sie das Volumen der Pyramide ABCP.

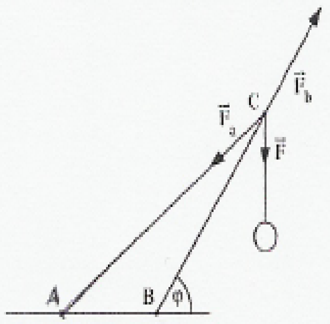
e. Zeigen Sie, dass die Höhe der Pyramide durch den Mittelpunkt des Umkreises der Grundfläche $\triangle$ ABC geht.

f. Eine Ebene E_4 geht durch den Punkt P und liegt parallel zur Geraden durch B und C. Sie teilt die Pyramide ABCP in zwei Teilkörper K_1 und K_2, wobei A ein Eckpunkt des Teilkörpers K_1 ist.
Das Verhältnis der Volumina von K_1 und K_2 ist 1 : 3.
Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene E_4.

Wiederholungskomplex 11 — Analytische Geometrie III
Aufgaben vom 23.02.2009 — Lösungen vom 10.03.2009

1. Anwendungsaufgabe aus der Physik

Bei einem Kran werden im Wesentlichen die Stahlkonstruktionen in Richtung der Strecken $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ belastet (vgl. Fig.).
Die Maße sind $|\overline{AB}| = 5$ m, $|\overline{BC}| = 10$ m und $\varphi = 55°$.



a) Bestimmen Sie die Kräfte $\vec{F}_a$ und $\vec{F}_b$, die in Richtung $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ wirken, wenn der Kran ein Gewicht mit der Gewichtskraft $\vec{F}$ mit $|\vec{F}| = 6$ kN hält und die Gleichgewichtsbedingung durch $\vec{F}_a + \vec{F}_b + \vec{F} = \vec{o}$ beschrieben ist!

b) Die Gewichtskraft $\vec{F}$ ist für den Kran auf 10 kN beschränkt. Weiterhin ist für den Winkel φ mit $\varphi_0 = 45°$ eine untere Schranke angegeben.
Bestimmen Sie mit den angegebenen Werten die maximale Kraft $\vec{F}_a^*$, die auf die Konstruktion der Strecke $\overline{AC}$ wirken kann!

Hinweis: Übertragen Sie die Skizze in ein geeignetes Koordinatensystem.
Der Punkt B sollte im Koordinatenursprung liegen.

---

2. Durch die Gleichung $4x + 5y + 20z = 0$ wird ein ebener Hang beschrieben.

a) Wie groß ist der Neigungswinkel der Ebene?

b) In welchem Punkt des ebenen Hanges steht ein 10 Meter hoher Baum, dessen Schatten der Baumspitze in den Ursprung des entsprechenden Koordinatensystems fällt, wenn die Sonnenstrahlen unter der Richtung $\vec{v} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ einfallen?

---

3. In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte A(8; -10; 1) und B(-1; 14; -5) sowie die Ebenen E_k durch $x + y + z - k = 0$ (k$\in$R) gegeben.

a) Die durch die Punkte A und B bestimmte Gerade g schneidet die Ebene E_2 im Punkt S. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes S sowie den Schnittwinkel zwischen der Geraden g und der Ebene E_2.

b) Bestimmen Sie den Abstand des Koordinatenursprungs zur Geraden g!

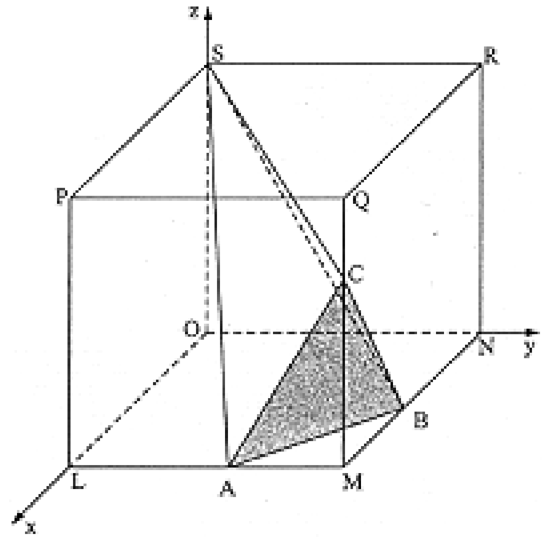
c) Ermitteln Sie jeweils eine Gleichung der beiden Ebenen E_k, die durch den Punkt A bzw. durch den Punkt B verlaufen, und bestimmen Sie den Abstand dieser beiden Ebenen!

d) Ermitteln Sie das Volumen des graden Kreiskegels, dessen Grundfläche in der Ebene E_2 liegt, dessen Spitze der Koordinatenursprung O ist und dessen Seitenlinien mit der Grundfläche einen Winkel von $\frac{\pi}{6}$ einschließen.

12. Prüfungskomplex, Schuljahr 2008/09 – Analytische Geometrie –

Termin : 24.03.09

1) Eine gerade dreiseitige Pyramide ABCS mit der gleichseitigen Grundfläche ABC soll in einem würfelförmigen Karton verpackt werden (siehe Skizze 1). Die Eckpunkte der Pyramidengrundfläche haben folgende Koordinaten: A(5; 2; 0), B(2; 5; 0) und C(5; 5; 3).
Die Innenmaße des Kartons betragen a = 5 LE.



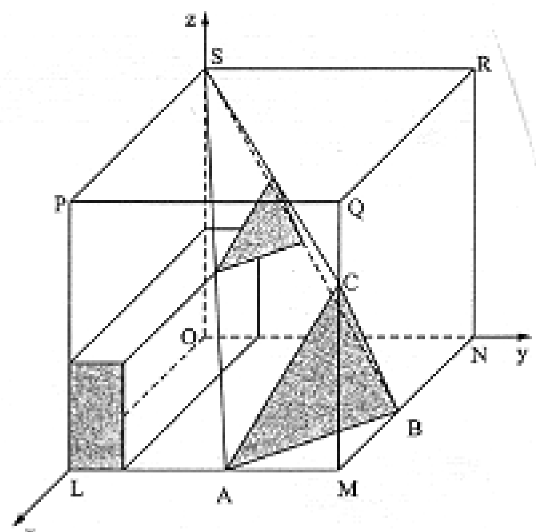
(Skizze 1 nicht maßstäblich)

a) Berechnen Sie die Länge der Seitenkante $\overline{AS}$!
Zeigen Sie, dass die Raumdiagonale des Würfels, die den Punkt S enthält, senkrecht zur Pyramidengrundfläche ABC verläuft!
Ermitteln Sie die Höhe h der Pyramide!
(Kontrollergebnis: $h = 4 \cdot \sqrt{3}$ LE)
Vor dem Verpacken stand die Pyramide mit ihrer Grundfläche ABC auf der x-y-Ebene. Um welchen Winkel α ist die Pyramide beim Verpacken aus dieser Lage zu neigen?

b) Berechnen Sie das Volumen und den Oberflächeninhalt der Pyramide!

c) Jede Raumdiagonale des Würfels, die den Punkt S nicht enthält, schneidet eine Seitenkante der Pyramide.
Berechnen Sie einen dieser Schnittwinkel!

d) Ein ebener Schnitt durch den Mittelpunkt des Würfels und parallel zur Grundfläche der Pyramide teilt die Pyramide in zwei Teilkörper, eine gerade Pyramide und einen geraden Pyramidenstumpf (siehe Skizze 2).
Geben Sie eine parameterfreie Gleichung der Schnittebene an!
Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes A', der Eckpunkt der kleinen Pyramide ist und auf der Seitenkante $\overline{AS}$ der großen Pyramide liegt!



(Skizze 2 nicht maßstäblich)

2) Zur Beschreibung der Position von Flugzeugen im Luftraum werde ein kartesisches Koordinatensystem benutzt. Die als eben angenommene Erdoberfläche liege in der x-y-Ebene.
Die Flugbahn des Flugzeuges F_1 verläuft geradlinig durch die Punkte P(0;15;8) und Q(2;13;8). Für jedes k ($k \in \mathbb{N}$, $0 < k \leq 20$) verläuft eine mögliche geradlinige Flugbahn des Flugzeuges F_2 durch die Punkte $S_k\left(15; -2{,}5; \frac{k}{2}\right)$ und $T_k(30; -10; k)$.

a) Zeigen Sie, dass für k = 12 die beiden Flugzeuge auf den Bahnen kollidieren können.

b) Das Flugzeug F_2 befindet sich auf einer der möglichen Flugbahnen im Punkt S_k. Untersuchen Sie, ob das Flugzeug F_2 in jedem Fall von der im Punkt O(0; 0; 0) befindlichen Bodenstation gesehen werden kann, wenn die Sichtweite 18 Längeneinheiten beträgt.

c) Von einem „Beinahezusammenstoß“ spricht man, wenn der Abstand zweier Flugzeuge weniger als eine Längeneinheit beträgt.
Für welche Werte von k kann es auf den Bahnen der Flugzeuge F_1 und F_2 zu einem „Beinahezusammenstoß“ kommen?

d) Die geradlinig verlaufende Grenze zum Nachbarland geht durch die Punkte G(0; –33; 0) und H(100; –83; 0). Die Grenze des Luftraumes ist eine zur Erdoberfläche (x-y-Ebene) senkrechte Ebene, die die Landesgrenze enthält.
Aus Sicherheitsgründen muss sich ein Flugzeug bei Annäherung an das Nachbarland spätestens bei dessen Bodenstation anmelden, wenn der Abstand zur Luftraumgrenze 10 Längeneinheiten beträgt.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes, in dem sich Flugzeug F_1, welches sich im Punkt P befindet und sich der Luftraumgrenze des Nachbarlandes nähert, spätestens bei der Bodenstation des Nachbarlandes anmelden muss.

13. Prüfungskomplex - Mathematik Schuljahr 2008/09
Stochastik

Abgabetermin 07.04.2009

Aufgabe 1)

Prüfungsaufgabe Stochastik zur Thematik Binomialverteilung, Kombinatorik und Verknüpfung von Ereignissen

Ein Betrieb hat sich auf die Produktion elektronischer Bauelemente spezialisiert. Erfahrungsgemäß sind 12 % der produzierten Bauteile defekt.

a) Der laufenden Produktion werden 5 Bauteile entnommen.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist höchstens eines dieser Bauteile defekt?

b) Einer Tagesproduktion von 50 Stück, die genau 6 defekte Teile enthält, werden 5 Teile entnommen.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist höchstens eines dieser Bauteile defekt?

In diesem Betrieb wird durch ein Prüfgerät ein defektes Bauteil mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,96 als defekt erkannt. Allerdings zeigt das Prüfgerät auch einwandfreie Teile fälschlicherweise mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,02 als defekt an.

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß das Prüfgerät die richtige Entscheidung trifft?

d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit zeigt das Gerät ein der laufenden Produktion entnommenes Bauteil als defekt an?

e) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein als defekt angezeigtes Bauteil auch wirklich defekt ist?

f) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit dafür an, daß ein durch das Prüfgerät als nicht defekt angezeigtes Teil auch wirklich nicht defekt ist.

Fachbereich Mathematik
Bernhard-von-Cotta-Gymnasium Brand-Erbisdorf

14.Prüfungskomplex-Ma-Leistungskurs 2008/09 - Stochastik/Teil II

1. Eine Firma stellt verschiedene Elektronikerzeugnisse her. Eines dieser Produkte besteht aus drei Bauteilen T_1, T_2 und T_3. Falls ein Bauteil ausfällt, ist das Produkt nicht mehr funktionsfähig. Es ist bekannt, dass jedes dieser Teile innerhalb der Garantiezeit mit der Wahrscheinlichkeit 0,2 ausfällt und dass dieser Ausfall keine Auswirkungen auf die Funktionsfähigkeit der anderen Teile hat. In den Garantiebedingungen erklärt sich die Herstellerfirma bereit, bei jedem Bauteil einmalig die Kosten für den Austausch zu übernehmen. Die Kosten für den Austausch von T_l betragen 150 DM, von T_2 120 DM und von T_3 30 DM.

    a. Die Zufallsgröße X beschreibt die Kosten pro Produkt, die der Herstellerfirma durch die Garantieleistungen entstehen.
    Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X an. Ermitteln Sie die Kosten, die die Herstellerfirma durch die Garantieleistungen pro Produkt erwarten muss.
    b. Ein Erzeugnis der Firma sind Taschenrechner. Bekannt ist, dass 10 % der produzierten Geräte defekt sind. Ursache dafür können die Fehler F_1 und F_2 sein. Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von Fehler F_1 beträgt 0,04. Sowohl Fehler F_1 als auch Fehler F_2 haben 0,25 % der produzierten Taschenrechner.
    Untersuchen Sie, ob die beiden Fehler Fl und F2 unabhängig voneinander auftreten.
    c. Ein Kontrolleur benötigt für eine Analyse einen Taschenrechner, der sowohl Fehler F_l als auch Fehler F_2 aufweist.
    Wie viele Geräte müssen der Produktion wenigstens entnommen werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99% wenigstens ein solcher Rechner dabei ist?
    d. Um Taschenrechner preiswert kaufen zu können, gaben die Gymnasien einer Stadt eine Sammelbestellung von 750 Stück bei dieser Firma ab. Die Zufallsgröße Y beschreibt die Anzahl der Rechner unter den 750 gelieferten Geräten, die den Fehler F_l aufweisen.
    Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Fehler F_l bei weniger als 20 Rechnern auftritt?

2. Von vier Firmen wurde eine Brücke gebaut. Firma I lieferte dabei 10% der gesamten LKW-Ladungen mit Fertigbeton, Firma II 20%, Firma III 30% und Firma IV 40%. Bekannt ist, dass in Firma I bei 1% ihrer LKW-Ladungen mit Fertigbeton die Mischung nicht den gestellten Qualitätsanforderungen entsprach, in Firma II galt das für 0,4%, in Firma III für 0,3% und in Firma IV für 0,1%.

    a. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der eine während der Bauarbeiten zufällig ausgewählte LKW-Ladung mit Fertigbeton nicht das richtige Mischungsverhältnis besaß.
    b. Man betrachte folgenden Vorgang:
    Bei der Anlieferung von Fertigbeton erfolgen Qualitätskontrollen. Für diese Überprüfungen werden zufällig LKWs ausgewählt.
    Ermitteln Sie die Anzahl der Kontrollen, die mindestens nötig sind, damit mit einer Wahrscheinlichkeit größer als 0,9 wenigstens eine LKW-Ladung von Firma I unter den kontrollierten ist.

c. Während des Baugeschehens wurden in einer Woche 240 LKW-Ladungen mit Fertigbeton gezählt. Auch in dieser Woche betrug die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter LKW eine Lieferung von Firma IV geladen hatte, 40%.
   Die Zufallsgröße Y beschreibt die Anzahl der LKW-Ladungen, die in dieser Woche von Firma IV kamen.
   Berechnen Sie die Standardabweichung der Zufallsgröße Y.
   Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass weniger als 94 dieser LKW-Ladungen von Firma IV kamen?
d. Bei der Bauabnahme wurden Risse entdeckt, die auf Fehler im Mischungsverhältnis des Betons zurückzuführen waren. Die Kosten für die daraus resultierende Reparatur beliefen sich auf 200 000,00 DM.
   Da es nach Bauabschluss nicht möglich war, den Verursacher dieser Schäden zu ermitteln, musste ein Vorschlag zur Verteilung der Reparaturkosten auf die am Bau beteiligten Firmen erstellt werden.
   Entwickeln Sie unter Beachtung des möglichen Verursacherprinzips einen solchen Vorschlag.