1 Übung Analysis zur Prüfungsvorbereitung

1.1 Aufgabe

Lehrbuch KLETT Mathematik Leistungskurs S. 146/13

1.2 Lösungen

1.2.1 zu a):

Gegeben: Kurvenschar $f_a(x) = x^3 + \frac{a}{2}x^2 + (a+1)x$ mit $a \in R$
Gesucht: alle Funktionen f_a haben zwei gemeinsame Punkte

Die gemeinsame Punkte finden wir durch Gleichsetzen zweier beliebiger Funktionen der Kurvenschar:
Ansatz: $f_a = f_b$ mit $a \neq b$

$x^3 + \frac{a}{2}x^2 + (a+1)x = x^3 + \frac{b}{2}x^2 + (b+1)x$ Auf den ersten Blick existiert eine Lösung für $x_1 = 0$ und deshalb dürfen wir die Gleichung durch x teilen und erhalten:
$x^2 + \frac{a}{2}x + (a+1) = x^2 + \frac{b}{2}x + (b+1)$
Wie subtrahieren auf beiden Seiten x^2 und erhalten:
$\frac{a}{2}x + (a+1) = \frac{b}{2}x + (b+1)$
Wir stellen nach x um:
$\frac{a}{2}x - \frac{b}{2}x = (b+1) - (a+1)$
Wir vereinfachen:
$(\frac{a}{2} - \frac{b}{2})x = b - a$
und teilen durch den Klammerausdruck mit dem Ergebnis:
$x = 2\frac{b-a}{a-b}$ bzw. $x = -2\frac{b-a}{b-a}$ und schließlich $x_2 = -2$.

Die beiden gemwinsamen Punkte lauten also: $P_1(0|0)$ und $P_2(-2|-10)$.

1.2.2 zu b):

Gesucht: Stelle x_0 der parallelen Tangenten

Lösung: Wir bilden die 1. Ableitungen zweier beliebiger Funktionen der Kurvenschar und setzen diese beide Funktionen gleich:
Ansatz: $f'_a = f'_b$ mit $a \neq b$

$3x^2 + ax + (a+1) = 3x^2 + bx + (b+1)$
Auch hier lösen wir die Gleichung wieder, $3x^2$ wird auf beiden Seiten subtrahiert:
$0 = ax - bx + (a+1) - (b+1)$ bzw. $0 = (a-b)x + a - b$ und daraus folgt: $x_0 = -1$
Die Steigung der Tangenten beträgt: $f'_a(-1) = 4$.

1.2.3 zu c):

Gesucht: Für welche Werte a schneidet K_a die zweite Winkelhalbierende $y = -x$ dreimal (zweimal, einmal)?

Lösung: Diesmal setzen wir die 2. WH mit einer beliebigen Funktion aus der Kurvenschar gleich:
$-x = x^3 + \frac{a}{2}x^2 + (a+1)x$
Wir addieren x und erhalten zunächst:
$0 = x^3 + \frac{a}{2}x^2 + (a+2)x$
Nun lösen wir die Gleichung durch Faktorisierung: $0 = x(x^2 + \frac{a}{2}x + (a+2))$
Der erste Fall bringt uns: $x_1 = 0$, sozusagen die erste Schnittstelle.
Der zweite Fall bringt uns eine quadratische Gleichung:
$0 = x^2 + \frac{a}{2}x + (a+2)$, die wir nun noch mit Leichtigkeit lösen können:
$x_{2,3} = -\frac{a}{4} \pm \sqrt{\frac{a^2}{16} - (a+2)}$
Dabei stellen wir fest: Diese Gleichung hat:
keine Lösung, falls die Diskriminante D kleiner 0 ist, d.h. es gibt keinen weiteren Schnittpunkt
eine Lösung, falls die Diskriminante D gleich 0 ist, d.h. es gibt einen weiteren Schnittpunkt
zwei Lösungen, falls die Diskriminante D größer 0 ist, d.h. es gibt zwei weitere Schnittpunkte.
(Hinweis: Die Diskriminante ist der Ausdruck unter der Wurzel.)

Demnach überprüfen wir das Vorzeichen der Diskriminante, indem wir rechnen:
$0 = \frac{a^2}{16} - (a+2)$ bzw. $0 = a^2 - 16a - 32$
Für a erhalten wir zwei Lösungen: $a_1 = 8 + 4\sqrt{6}$ und $a_2 = 8 - 4\sqrt{6}$
Mit logischer Überlegung schlußfolgern wir:
Es existiert genau ein Schnittpunkt, falls gilt: $D < 0$ für $8 - 4\sqrt{6} < a < 8 + 4\sqrt{6}$
Es existieren genau zwei Schnittpunkte, falls gilt: $D = 0$ für $a = 8 \pm 4\sqrt{6}$
Es existieren genau drei Schnittpunkte, falls gilt: $D > 0$ für $a > 8 + 4\sqrt{6}$ oder $a < 8 - 4\sqrt{6}$

1.2.4 zu d):

Gesucht: Funktionen f_-1, f_0, f_1, f_2 und f_3 der Kurvenschar

Lösung: Siehe Abbildung d_1

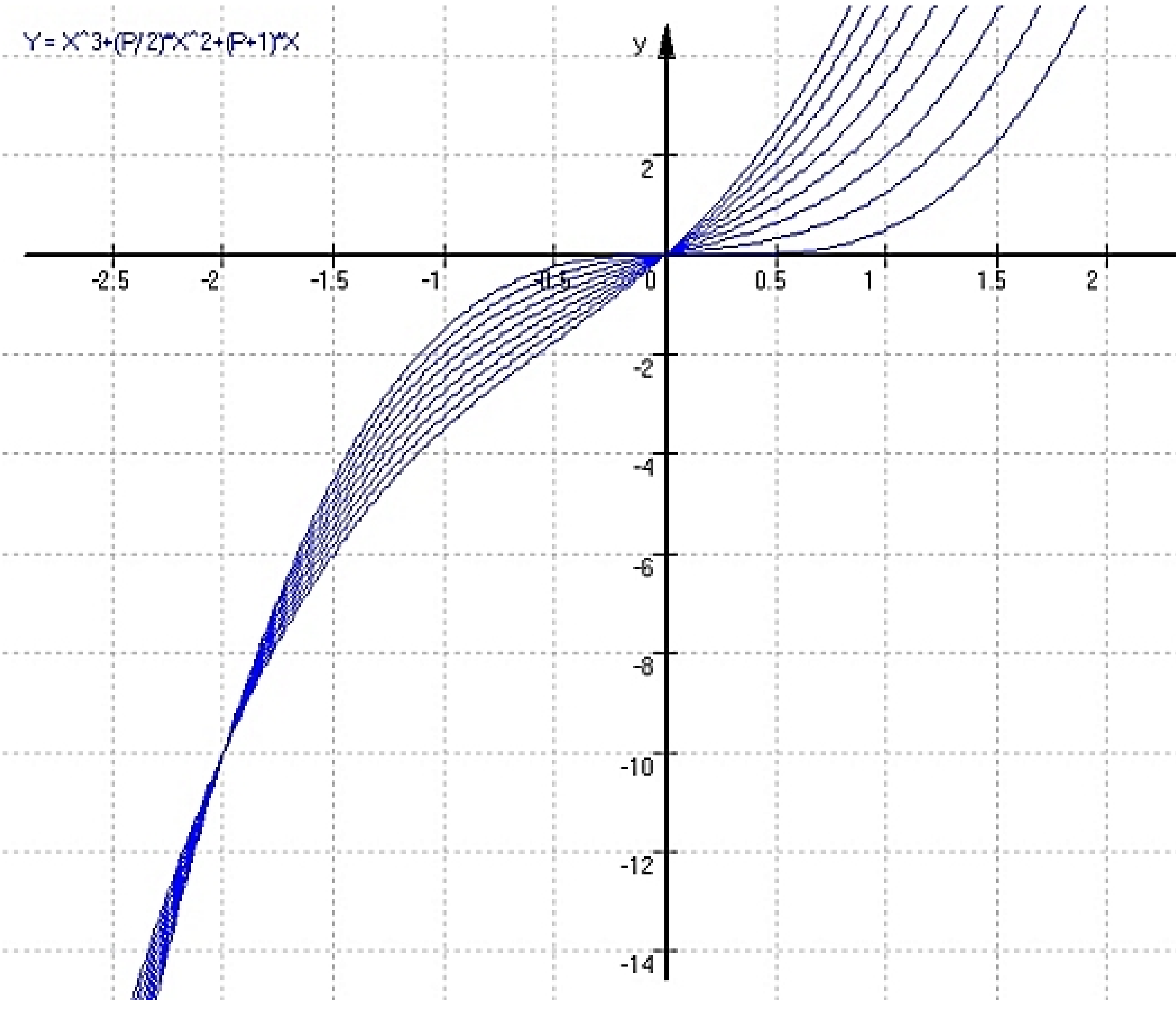

Abb. d_1