1 Übung Analysis zur Prüfungsvorbereitung

1.1 Aufgabe

Lehrbuch KLETT Mathematik Leistungskurs S. 253/13

1.2 Lösungen

1.2.1 zu a):

Gegeben: Funktion $f_t(x) = \frac{8}{x}(\sqrt{x} - t)$ mit $t \in R^+$
Gesucht: Nullstellen, Extrem- und Wendepunkte, Asymptoten, Kurve f_1

Bevor wir loslegen und ohne GTR arbeiten wollen:
Die Funktion kann man als Summe schreiben, damit kann sie sehr einfach differenziert werden:
$f_t(x) = 8x^{-0,5} - 8tx^{-1}$

Lösung Nullstellen:
$0 = \frac{8}{x}(\sqrt{x} - t)$
$0 = \sqrt{x} - t$
$x_0 = t^2$

Lösung Extrempunkte:
$f_t'(x) = 8tx^{-2} - 4x^{-1,5}$
notw.Bed.:
$f_t'(x) = 0 = 8tx^{-2} - 4x^{-1,5}$
$x_E = 4t^2$
hinr.Bed.:
$f_t''(x) = -16tx^{-3} + 6x^{-2,5}$
$f_t''(4t^2) = -16t(4t^2)^{-3} + 6(4t^2)^{-2,5} = \frac{-1}{16t^5} < 0 \Longrightarrow$ lokales Maximum für $t > 0$
Extrempunkt:
$P_H(4t^2|\frac{2}{t})$

Lösung Wendepunkte:
$f_t''(x) = -16tx^{-3} + 6x^{-2,5}$
notw.Bed.:
$0 = -16tx^{-3} + 6x^{-2,5} \quad | \bullet x^3$
$0 = -16t + 6\sqrt{x}$
$16t = 6\sqrt{x} \quad | : 6$
$\frac{8}{3}t = \sqrt{x} \quad |Gl.^2$
$x_w = \frac{64}{9}t^2$
hinr.Bed.:
$f_t'''(x) = 48tx^{-4} - 15x^{-3,5}$
$f_t'''(\frac{64}{9}t^2) = 48t(\frac{64}{9}t^2)^{-4} - 15(\frac{64}{9}t^2)^{-3,5} = \frac{0,003}{t^7} > 0 \Longrightarrow$ ist Wendestelle für $t > 0$
Wendepunkt:
$P_w(\frac{64}{9}t^2|\frac{15}{8t})$

Lösung Asymptoten:
Polgerade bei $x = 0$, weil $\lim\limits_{n \to 0} \frac{8}{x}(\sqrt{x} - t) = \frac{-8t}{0}$, d.h. es existiert kein Grenzwert

Waagerechte Asymptote $y = 0$, weil $\lim\limits_{n \to \pm\infty} \frac{8}{x}(\sqrt{x} - t) = 0$

Lösung Kurve f_1 mit ClassPad:

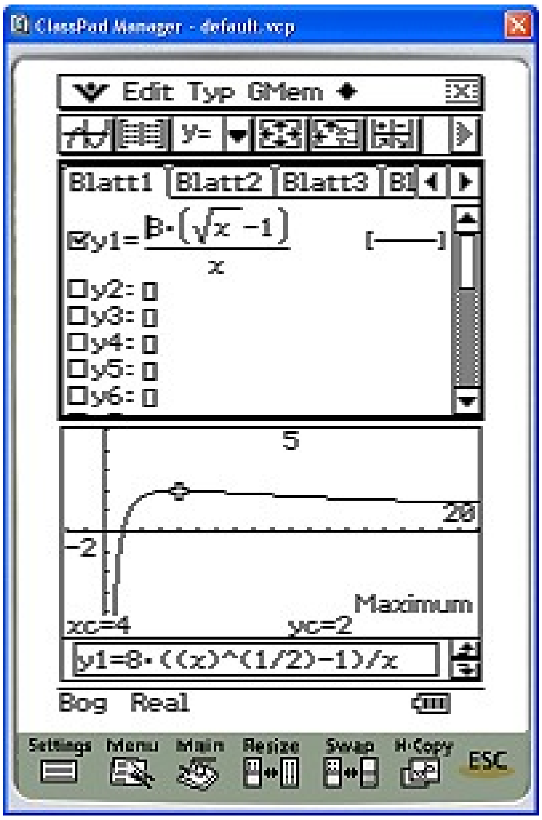

Abb. a_1

1.2.2 zu b):

Gesucht: Geometrischer Ort aller Hochpunkte
Lösung: Alle $P_H(4t^2|\frac{2}{t})$ beschreiben eine Funktion, die auch als Geometrischer Ort bezeichnet wird.
Dabei gilt $x = 4t^2$ und $y = \frac{2}{t}$
Stellt man die erste Aussage nach t ($t > 0$) um, erhält man $t = \sqrt{\frac{x}{4}}$
Nun setzen wir dieses Aussage in die Gleichung $y = \frac{2}{t}$ ein. Damit erhalten wir schließlich: $y = \frac{4}{\sqrt{x}}$ als Funktionsgleichung für alle Hochpunkte.

Hinweis: Die Suche nach dem Geometrischen Ort wird in Prüfungen sehr häufig abgefragt. Siehe auch Abb. b_1. Hier ist neben der Kurvenschar $f_t(x)$ auch die Ortskurve (Geometrischer Ort aller Hochpunkte) eingezeichnet.

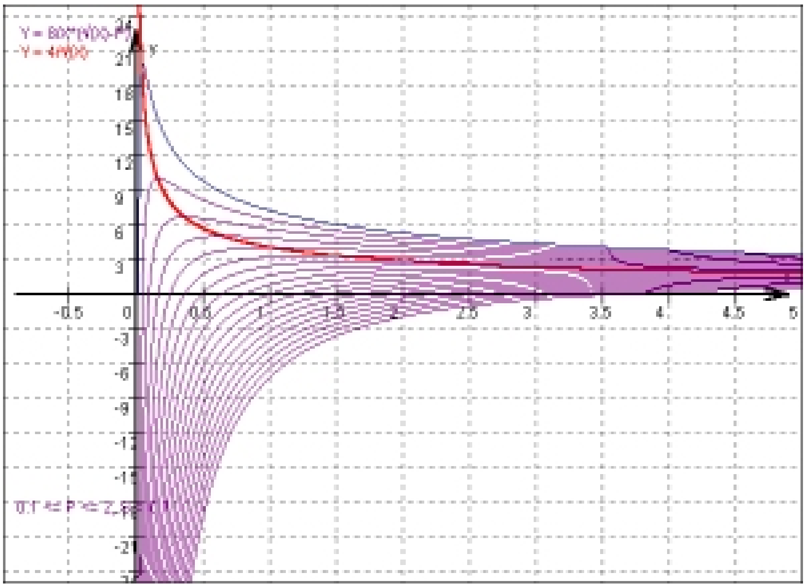

Abb. b_1

1.2.3 zu c):

Gesucht: Alle Kurven, die unterhalb der Geraden $y = 1$ verlaufen.
D.h., wir suchen den Parameterwert t, für den obige Aussage gilt.

Da $P_H(4t^2|\frac{2}{t})$ der höchste Punkt von $f_t(x)$ ist, gilt:
$\frac{2}{t} < 1$ und damit gilt: $t > 2$.

1.2.4 zu d):

Gesucht: t
Lösung: Wir wissen: $h : y = \frac{1}{4}x$ ist Tangente an f und f hat mit h einen Punkt gemeinsam.
Daraus ergeben sich zwei Aussagen:

$I) f_t'(x) = \frac{1}{4}$ und $II) h = f_t(x)$

Wir notieren also das Gleichungssystem:

$I) 8tx^{-2} - 4x^{-1,5} = \frac{1}{4}$ und
$II) 8x^{-0,5} - 8tx^{-1} = \frac{1}{4}x$

Mit schriftlichen Mitteln zum Lösen von Gleichungssystemen (z.B. Einsetzungsverfahren) oder mittels GTR erhalten wir die Lösungen $x = \frac{16}{9}t^2$ und $t = 1,5$.