1 Übung Geometrie zur Prüfungsvorbereitung

1.1 Aufgabe

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte A(8|0|0), B(8|3|0), C_t(4t+5|3|-3t), teR und D(0|0|6) gegeben.

a) Geben Sie eine Gleichung der Geraden g an, auf der alle Punkte C_t liegen.
Stellen Sie eine Normalengleichung derjenigen Ebene auf, die A und B enthält und zu g parallel ist.

b) Für welche Werte von t hat das Dreieck ABC_t einen rechten Winkel?

c) Für welche Werte von t ist das Dreieck ABC_t gleichschenklig?

d) Legen Sie eine Schrägbildzeichnung für die beiden in Teilaufgabe c) ermittelten gleichschenkligen Dreiecke an. Schraffieren Sie die beiden Dreiecke.

e) Weisen Sie nach, daß die Volumenmaßzahl der Pyramide ABC_tD 9 ist. Geben Sie eine geometrische Deutung dafür, daß dieses Ergebnis von t unabhängig ist.

f) Für welchen Wert von t ist die Entfernung BC_t ein Minimum?

1.2 Lösungen

1.2.1 zu a):

Gesucht: Gerade g(C_t)

$$g : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ enthält alle Punkte } C_t$$

Gesucht: Normalengleichung der Ebene E(A,B,||g), d.h. wir benötigen einen Punkt und einen Normalenvektor der Ebene E: Wähle als Punkt den Punkt $A(8|0|0)$ und bilde den Normalenvektor mit Hilfe der Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und dem Richtungsvektor der Geraden g (siehe Abb. a_1).

$$\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ -12 \end{pmatrix} \text{ und gekürzt erhalten wir } \overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{für E gilt jetzt: } \left[\overrightarrow{x} - \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] O \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$$

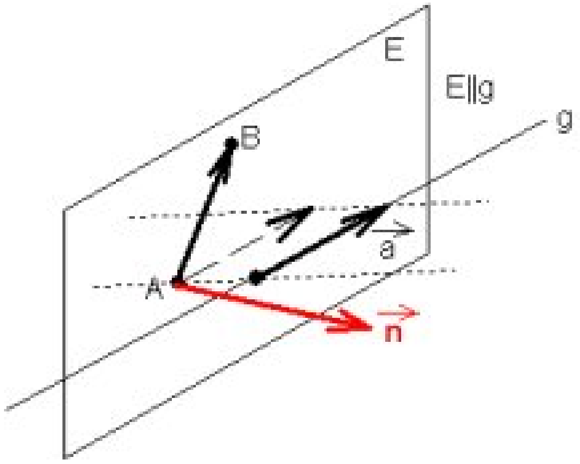

Abb. a_1

1.2.2 zu b):

Aufgrund grafischer Überlegungen über die Lage des Dreiecks ABC_t folgt: Der rechte Winkel befindet sich bei B. Nachweis des rechten Winkels:

$\overrightarrow{BA}$ O $\overrightarrow{BC_t} = 0 \Longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ O $\begin{pmatrix} 4t-3 \\ 0 \\ -3t \end{pmatrix} = 0$

und daraus folgt mit: $0t = 0$ dass $\forall t \in R$ bei B ein rechter Winkel existiert.

1.2.3 zu c):

Aufgrund grafischer Überlegungen über die Lage des Dreiecks ABC_t folgt für den Nachweis der Gleichschenkligkeit:

$|\overrightarrow{BA}| = |\overrightarrow{BC_t}|$

$\sqrt{0^2 + (-3)^2 + 0^2} = \sqrt{(4t-3)^2 + 0^2 + (-3t)^2}$

$0 = 25t^2 - 24t$

Für $t_1 = 0$ und $t_2 = 0,96$ ist das Dreieck gleichschenklig.

1.2.4 zu d):

Siehe Abb. d_1

1.2.5 zu e):

Bei der Pyramide ABC_tD handelt es sich um ein Tetraeder. Die Berechnung des Volumens kann z.B. mittels Spatprodukt erfolgen. Die Formel dafür lautet:

$V = \frac{1}{6}|(\overrightarrow{AB}$ X $\overrightarrow{AC_t})$ O $\overrightarrow{AD}|$

Mit gegebenem Volumenwert 9 folgt:

$9 = \frac{1}{6}\left|\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ X } \begin{pmatrix} 4t-3 \\ 3 \\ -3t \end{pmatrix}\right] \text{ O } \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}\right|$

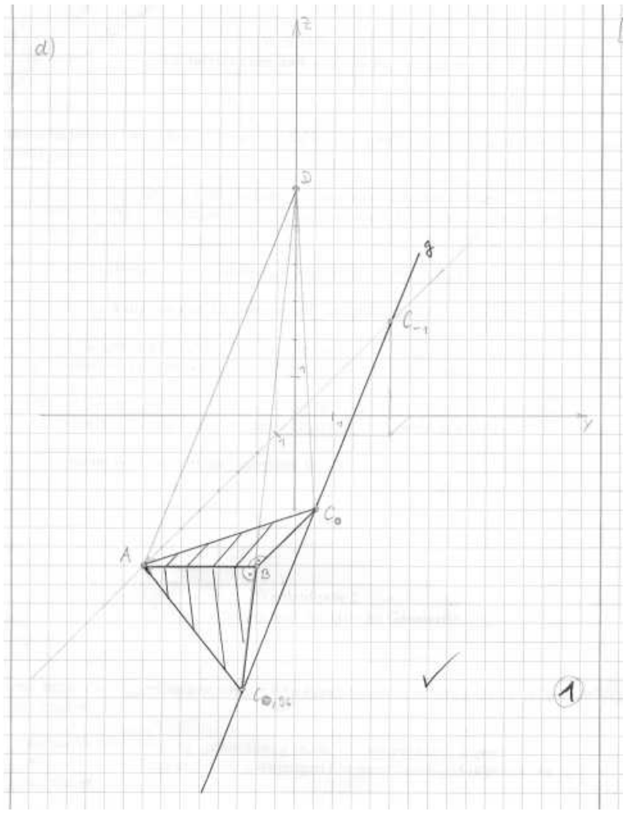

Abb. d_1

Nach einigen Schritten der Vereinfachung erhalten wir den Ausdruck:
$9 = 9$ (t hat sich zu 0 addiert.)
Das bedeutet nun, dass das Volumen von t unabhängig ist. w.z.z.w.

Geometrische Begründung: (Nach Satz des Cavalieri)

Das Tetraeder besitz die Grundfläche ABD. Die Spitze des Tetraeders ist C_t. Man kann zeigen, dass die Gerade g zur Grundfläche ABD parallel ist. Demzufolge bleibt die Tetraeder-Höhe mit veränderlichem C_t immer gleich groß. Dadurch ändert sich das Volumen des Tetraeders aufgrund des Zusammenhangs $V = \frac{1}{3}A_G h$ nicht.

1.2.6 zu f):

Gesucht: Für welchen Wert t ist die Entfernung $\overrightarrow{BC_t}$ ein Minimum? Wir können die Extremwertaufgabe ganz clever umgehen, wenn wir folgende Überlegungen notieren:

Wegen $|\overrightarrow{BC_0}| = |\overrightarrow{BA}| = |\overrightarrow{BC_{0,96}}|$ aus Aufgabe c) folgt, dass das Dreieck $C_0BC_{0,96}$ gleichschenklig ist.

Demzufolge muss der Basishöhenfußpunkt $C_{0,48}$ in diesem Dreieck von B den kürzesten Abstand haben.

Für $t = 0,48$ beträgt der kürzeste Abstand $|\overrightarrow{BC_{0,48}}| = 1,8$.