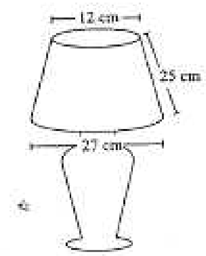
1. Prüfungskomplex – Mathematik Schuljahr 2006/07
- Wiederholung Grundwissen-

Termin 25.09.2006



(Skizze nicht maßstabsgetreu)

1. Eine alte Lampe soll mit einem neuen Lampenschirm aufgepeppt werden. Der Lampenschirm hat die Form eines geraden Kegelstumpfes. Fertigen Sie eine maßstabsgerechte Zeichnung der Schirmfläche. Berechnen Sie alle Größen, die für das Anfertigen des Schirmes benötigt werden.

2. Vereinfache die Terme!

a) $\lg(2a) - 2\lg(a) + \lg(a^2) + \lg(a^{-1})$ b) $\lg(\sqrt{x}) - \lg(\sqrt{4x}) + \lg(0{,}5x^2) + \lg(4)$

c) $(\sqrt{a}\sqrt{b}) : (\sqrt{abc})$

d) $\sqrt{\frac{xy^2z}{16}} \cdot (\sqrt{\frac{4x}{5z}} : \sqrt{\frac{5}{x}})$ e) $\sqrt{\frac{x^2}{3} + \frac{4}{9}x + \frac{4}{27}}$

f) $(a + \sqrt{b})(a - \sqrt{b})$ g) $(8x^2)^{\frac{3}{2}}(8x)^2$

h) $(a^{n+3} - 3a^n - a^{n-3}) : a^{-3}$

i) $\frac{3x^{-2}y}{2a^2b} : \frac{x^4y^{-3}}{6ab^2}$ j) $\frac{p^3q^{-2}}{r^{-4}s^{-5}} : \frac{r^{-6}s^{-1}}{p^{-1}q^2}$ k) $\frac{(ab)^{-2}}{x^2y^{-1}} \cdot \frac{(xy)^2}{a^3b}$

3. Führe eine Polynomdivision durch!

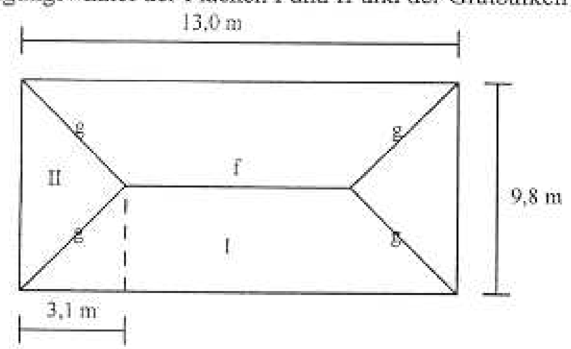
a) $(x^4 + 2x^3 + 4x - 1) : (x^2 + 2)$ b) $(x^{n+2} + x^{n+1} - 2x^2 - 2x) : (x^n - 2)$

4. Löse folgende Gleichungen! Beachten Sie bei Aufgabe e) den Definitionsbereich der Gleichung!

a) $2^{x+1} \cdot 4^{2x-2} = 8^x$ b) $10 \cdot 5^{3x-1} = 2 \cdot 5^{x+1}$ c) $\lg(5 - 4x) = \lg(1 + 4x)$

d) $\lg(x) = 2\lg(x) + \lg(1 + x)$ e) $(x^2 - 5x - 9)^{0,5} = (4x + 1)^{0,5}$

5. Die Abbildung zeigt den Grundriss eines Walmdaches. Der First (Länge f) befindet sich 4,1 m über dem Dachboden. Berechne die Neigungswinkel der Flächen I und II und der Gratbalken g bezüglich des Dachbodens.



6. Aus einer Urne mit fünf roten und sechs weißen Kugeln werden nacheinander mit Zurücklegen drei Kugeln auf gut Glück entnommen.

I) Entwickle ein Baumdiagramm und ermittle die Ergebnismenge dieses Zufallsexperiments.

II) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man

a) drei rote Kugeln zieht,

b) das Ereignis {rot,weiß,rot} eintritt,

c) genau eine rote Kugel zieht,

d) höchstens zwei weiße Kugeln findet?

2. Prüfungskomplex – Ma-Leistungskurs 2004/05 - Zahlenfolgen und Grenzwerte

Abgabetermin 13.10.2006

1. Berechnen Sie!

a) $\sum_{i=1}^{7} 2^i$ b) $\sum_{k=2}^{10} k-3$ c) $\sum_{i=1}^{4} i^3 + \sum_{i=5}^{8} i^3 - \sum_{i=1}^{8} i^3$ d) die Summe aller ungeraden Zahlen unter 400

2. Stellen Sie die Summe mit Summenzeichen dar und berechnen Sie!
$180 + 130 + 80 + 30 - 20 \ldots - 820$

3. Beweisen Sie folgende Aussage: „Eine konvergente Zahlenfolge hat höchstens einen Grenzwert."

4. Eine Zahlenfolge (a_n) hat die Folge der Partialsummen (s_n) mit der Bildungsvorschrift:

$$s_n = \frac{2n}{n+1} \quad (n \in \mathbb{N}, n > 0).$$

a) Geben Sie die Glieder s_1 bis s_5 der Folge (s_n) an!
b) Untersuchen Sie die Folge (s_n) auf Monotonie, Beschränktheit, Existenz von Grenzen und Konvergenz!
c) Berechnen Sie den Grenzwert von (s_n), falls dieser existiert.
d) Wie viele Glieder der Folge (s_n) sind kleiner als 1,99?
e) Wie viele Zahlenfolgenglieder liegen außerhalb der 0,005-Umgebung des Grenzwetes von(s_n)?
f) Berechnen Sie die Glieder a_1 bis a_5 und a_n der Folge (a_n)!

5. Untersucht werden die drei Zahlenfolgen (a_n), (b_n) und (c_n), $n \geq 1$.

a) (a_n) ist durch

$$a_n = \frac{3n+21}{2n-1} \quad \text{gegeben.}$$

- Berechnen Sie die Glieder a_3 und a_5.
- Weisen Sie nach, dass die Zahl 2,5 kein Glied der Folge ist.
- Zeigen Sie, dass 2 keine Schranke von a_n ist.

b) (b_n) ist eine arithmetische Zahlenfolge mit $b_3 = a_3$ und $b_5 = a_5$.
(s_n) ist die zu (b_n) gehörende Partialsummenfolge.
- Geben Sie eine explizite Zahlenfolge für (b_n) an!
- Berechnen Sie s_1, s_2 und s_3!
- Geben Sie eine Summenformel für (b_n) an!

c) (c_n) ist eine geometrische Zahlenfolge mit $q > 0$ und $c_3 = a_3$ und $c_5 = a_5$.
- Geben Sie eine explizite Zahlenfolge (c_n) an!
- Ermitteln Sie, wie viele Glieder von (c_n) größer als 0,1 sind!

6. Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^{-2}$ $(x > 0)$.
Das Bild der Funktion, die x-Achse und die Geraden $x = 1$ und $x = 2$ begrenzen die Fläche A_1 vollständig. Die n-te Fläche A_n wird durch das Bild der Funktion f, die x-Achse und die Geraden $x = n$ und $x = n + 1$ vollständig begrenzt $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

a) Berechnen Sie die Flächeninhalte A_1, A_2, A_3 und A_n!
b) Die Flächeninhalte $A_1, A_2, \ldots, A_n$ bilden die Zahlenfolge A_n. Berechnen Sie die Glieder s_1, s_2 und s_3 der dazugehörigen Partialsummenfolge (s_n)!
c) Geben Sie eine Vermutung für das n-te Glied dieser Partialsummenfolge an!
d) Berechnen Sie $\lim_{n\to\infty} s_n$

Brand-Erbisdorf, d. 13.10.2006

3.Grenzwerte von Funktionen/Stetigkeit

Vorbereitung Abiturprüfung-Leistungskurs Mathematik

Wiederholen Sie: Grenzwerte von Funktionen (vgl. Zahlenfolgen), Grenzwertsätze für Funktionen, Berechnung von Grenzwerten von Funktionen und ihre grafische Bedeutung sowie die drei Kriterien für die Stetigkeit von Funktionen.

1. Ermitteln Sie mit Hilfe der Grenzwertsätze für Funktionen die Grenzwerte folgender Funktionen an der Stelle x_0.

a) $f(x) = x^2 + 3x + 2\ ;\ x_0 = 0$

b) $f(x) = \dfrac{2x + x^2}{x}\ ;\ x_0 = 0$

c) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}\ ;\ x_0 = 2$

d) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x - 1}\ ;\ x_0 = 1$

e) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1;\ \text{für } x < 1 \\ \lg x\ ;\ \text{für } x > 1 \end{cases}\ ;\ x_0 = 1$

f) $f(x) = \left(\dfrac{x^2 - x - 6}{x + 2}\right)^3;\ x_0 = -2$

2. Bestimmen Sie die Asymptote(n) für folgende Funktionen.

a) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$

b) $f(x) = \dfrac{3x^2 - 2x - 1}{x^2 - x - 2}$

c) $f(x) = 3^{-x} \cdot 4^x$

d) $f(x) = 2^x \cdot 3^{-x}$

3. Untersuchen Sie, ob f(x) an der Stelle x_0 stetig ist. Begründen Sie.

a) $f(x) = \sqrt{x}\ ;\ x_0 = 0$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ für } x_0 \leq 1 \\ \sqrt{x} \text{ für } x_0 > 1 \end{cases}\ ,\ x_0 = 1$

4. Bestimmen Sie $t \in R$ so, dass f(x) in R stetig ist.

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x - 1 & \text{für } x \leq 1 \\ tx + 1 & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

5. a) Weisen Sie nach, dass die Funktion g im gesamten Definitionsbereich stetig ist.

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(2x)}{x} & ; x \neq 0 \\ 2 & ; x = 0 \end{cases} \qquad x \in R$$

Hinweis: Es gilt $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

b.w.

b) Ermitteln Sie näherungsweise

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} g(x) \quad dx.$$

6.a) Gegeben ist die Funktion f durch

$$y = f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{4x - 4} \quad (x \in D_f).$$

Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion f in der Umgebung der Polstelle.
Ermitteln Sie eine Gleichung der linearen Funktion, deren Graph Asymptote des Graphen der Funktion f ist.
Zeichnen Sie den Graph der Funktion f im Intervall $-4 \leq x \leq 6$.

b) Der Graph der Funktion f und die Geraden mit den Gleichungen

$y = \frac{1}{4}(x+3)$, $x = 3$ und $x = z$ ($z \in R$; $z > 3$)

begrenzen für jeden Wert z jeweils eine Fläche A(z) vollständig.
Berechnen Sie den Inhalt der Fläche A(z).
Berechnen Sie den Wert z, für den der Inhalt dieser Fläche 1 beträgt.
Ermitteln Sie $\lim\limits_{z \to \infty} A(z)$.

7. Frank und Steffi spielen in einer Fernsehshow. Als Sieger der Vorrunde müssen sie einen Golfball in ein 9m entferntes Golfloch spielen. Das Paar hat 4 Versuche. Gelingt es, wenigstens dreimal zu treffen, gewinnt das Paar ein Auto.

Erfahrungsgemäß weiß man: Bei jedem Versuch trifft Frank mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,6 und Steffi mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,8.

a) Frank schlägt den Ball viermal. Berechnen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse.
Ereignis A: Frank trifft höchstens zweimal.
Ereignis B: Er trifft erst im letzten Versuch.

b) Steffi schlägt den Ball viermal. Wie groß ist dabei die Wahrscheinlichkeit, dass das Auto gewonnen wird.

c) Steffi absolviert im Training eine Reihe von Versuchen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit , dass bei 10 Versuchen von Steffi mindestens ein Fehlversuch auftritt.

Termin: **06.11.2006**

Wiederholungskomplex 04 **Thema: Differenzieren und Integrieren**

1. Wiederholen Sie die Begriffe: „Differenzenquotient“, „Differentialquotient“, „1.Ableitung einer Funktion f an einer Stelle x_0“ und deren graphische Deutung, sowie „Stammfunktion einer Funktion f“ und „Unbestimmtes Integral einer Funktion f“!

---

2. Stellen Sie den Differentialquotienten an der Stelle x_0 für folgende Funktionen auf!

A) $f(x) = x^3$ B) $f(x) = e^x$ C) $f(x) = \sin x$

---

3. Untersuchen Sie die Grenzwerte für $h \longrightarrow 0$ der folgenden Terme, indem Sie für h Folgen von Zahlen einsetzen, die von „links“ bzw. „rechts“ gegen 0 streben.
Fertigen Sie kleine Wertetabellen an!

A) $\frac{e^h - 1}{h}$ B) $\ln\left(1+\frac{h}{2}\right)^{\frac{2}{h}}$ C) $\frac{\cos h - 1}{h}$

---

4. Geben Sie diejenigen Stellen x_i ($i \in N, 1 \le i \le 5$) $x_i \in D_f$ an, an der die Tangente an den Graph der Funktion $f_i(x)$

A) parallel zur Geraden g: $y = \frac{1}{3}x + 1$ verläuft.

B) senkrecht zur Geraden h: $y = \frac{2}{5}x - 1$ verläuft.

$f_1(x) = x^2 + 2x$ $f_2(x) = \sqrt{3x}$ $f_3(x) = \frac{2x}{x^2+2}$

$f_4(x) = e^{-2x} + x^2$ $f_5(x) = \ln(1+x^2)$

---

5. Bilden Sie mit Hilfe der Ableitungsregeln die 1. Ableitung der folgenden Funktionen!

$f_1(x) = x^7 - ax^4 + \frac{a}{x}$ $f_2(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$ $f_3(x) = \frac{x}{x+1}$

$f_4(x) = \ln(x^2 - 5)$ $f_5(x) = 2\cos(x - \frac{\pi}{2}) + \frac{1}{3}\sin(3x+3)$

$f_6(x) = e^x x^2$ $f_7(x) = \frac{1}{x} + 3\ln x - \frac{\ln x}{x}$

---

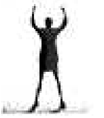
6. Ermitteln Sie das unbestimmte Integral der Funktion f.
Benutzen Sie bekannte Integrationsmethoden und machen Sie die Probe!

1) $\int (x^2 + ax)^2 dx$ 2) $\int \sqrt{ax+2}\, dx$ 3) $\int x \cdot \sin x\, dx$

4) $\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx$ 5) $\int \frac{x^3 + x^2 + 5x + 12}{x+3} dx$

Termin: 06.11.2006
20.11.2006

Viel Spaß bei der Bearbeitung dieser Aufgaben!



5. Prüfungskomplex Leistungskurs Mathematik Klasse 12

Thema : Sekante, Tangente, Normale

1. Gegeben ist die Funktion $y = f(x) = 1/x$.
   a) Berechnen Sie den Anstieg der Sekante s des Graphen der Funktion f durch die Punkte P (0,25; f(0,25)) und Q (4; f(4)).
   b) Bestimmen Sie diejenigen Punkte des Graphen von f, in denen der Tangentenanstieg mit dem Sekantenanstieg von s übereinstimmt. Geben Sie auch die dazugehörigen Tangentengleichungen an.

2. Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente und der Normale im Punkt P (2,25; f(2,25)) für die Funktion $f(x) = 1/x - \sqrt{x} + 1$.

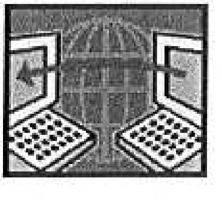
3. Gegeben sind die Funktionen $f(x) = x^2$ und $g(x) = 0{,}5 - x^2$.
   a) Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte beider Funktionen.
   b) Zeigen Sie, dass in einem der berechneten Schnittpunkte die Tangente an f gleichzeitig Normale von g ist und umgekehrt.
   c) Es gibt noch weitere Funktionen der Form $f_t(x) = tx^2$ und $g_s(x) = 0{,}5 - sx^2$, deren Graphen die in Teilaufgabe b) genannten Eigenschaften besitzen. Welche Bedingung müssen die Zahlen t und s erfüllen, damit dies der Fall ist?

4. Gegeben ist die Funktion $f_a(x) = x^3 + (0{,}5a)\,x^2 + (a + 1)\,x \qquad a \in \mathbb{R}$.
   a) Es gibt zwei Punkte, die auf allen Kurven K_a liegen. Bestimmen Sie deren Koordinaten.
   b) Es gibt eine Stelle x_0, für die die Tangenten aller Kurven f_a parallel sind. Bestimmen Sie diese Stelle und die Steigung der zugehörigen Tangenten.

5. Gegeben ist die Funktionsschar f_k mit $f_k(x) = x^2 + 3kx - \dfrac{4k^3}{x} \qquad (k \in \mathbb{R}, k > 0; x \in \mathbb{R}, x \neq 0)$
   a) Für jedes k ist die Gerade t_k Tangente und die Gerade n_k Normale an den Graphen der Funktion f_k im Punkt $P_k(k; 0)$. Jede Gerade n_k schneidet die y – Achse im Punkt R.
   Zeigen Sie, dass die Koordinaten des Punkte R von k unabhängig sind.
   b) Berechnen Sie den Wert k, für den die Tangenten an den Graphen der Funktion f_k an den Stellen $x_1 = 4$ und $x_2 = -2$ zueinander parallel sind.

6. Für jedes t mit $t \in \mathbb{R}, t > 0$ ist eine Funktion $f_t(x) = \dfrac{1}{\ln(tx)}$ gegeben.
   a) Für jeden Punkt $P_a(0; a)$ $(a \in \mathbb{R}, a > 0)$ existieren für jedes t genau zwei Tangenten an den Graphen der Funktion f_t.
   Beschreiben Sie ein Verfahren zur Ermittlung der Gleichungen eines solchen Tangentenpaares.
   b) Gegeben ist der Punkt P_2 (0; 2). Von diesem Punkt werden die Tangenten an den Graph der Funktion f_t gelegt. Ermitteln Sie je eine Gleichung dieser Tangenten.

7. Für jedes a $(a \in \mathbb{R}, a > 0)$ ist eine Funktion f_a durch $f_a(x) = (a^2 + 1)(\sin ax + \cos ax)$ $\left(x \in \mathbb{R}, 0 \leq x \leq \dfrac{2\pi}{a}\right)$ gegeben.
   a) Ermitteln Sie den maximalen Anstieg der Funktion f_2. Geben Sie eine Gleichung der Normalen n an den Graphen der Funktion $f_{0,5}$ im Schnittpunkt mit der y – Achse an.
   b) Ermitteln Sie eine Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion f_a im Schnittpunkt mit der y – Achse. Bestimmen Sie a so, dass der Anstieg der Tangente den Wert 2 hat.
   Geben Sie eine Gleichung der Tangente an.



Viel Erfolg beim Bearbeiten . T : 4.12.2006

Termin : 18.12.06

6. Prüfungskomplex
- Kurvendiskussion I : Gebrochenrationale und Wurzelfunktionen-

1)Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = \dfrac{9-x^2}{x^2+3}$ ($x \in R$).

a) Geben Sie die Achsenschnittpunkte ,das Symmetrieverhalten, die Asymptoten und die Koordinaten der lokalen Extrempunkte an und ermitteln Sie die Koordinaten der Wendepunkte!

b) Die Punkte P(0;0) , A(x ; f(x)) und B(-x ; f(-x)) mit $0<x<3$ bilden gleichschenklige Dreiecke. Unter diesen Dreiecken existiert genau ein Dreieck mit maximalem Flächeninhalt. Berechnen Sie, bei welcher irrationalen Zahl x der maximale Flächeninhalt auftritt und geben Sie diesen an! (ohne Nachweis des Extremums)

c) Durch die Punkte R(0;f(0)), S(-3;f(-3)) und T(3;f(3)) verläuft der Graph der Funktion g mit $g(x) = ax^2 + bx + c$ ($x \in R$). Der Graph von g und die Koordinatenachsen begrenzen im ersten Quadranten eine Fläche vollständig. Diese Fläche erzeugt bei Rotation um die y-Achse einen Rotationskörper. Berechnen Sie dessen Volumen!

d) Gegeben ist eine Funktionenschar durch $f_k(x) = \dfrac{9-x^2}{x^2+k}$ ($k \in R$; $x \in D_{fk}$).

In der Funktionenschar f_k existiert genau eine Funktion, für die für alle $x \in D_{fk}$ gilt : $f_k''(x) = 0$. Zeigen Sie, dass diese Funktion keine Polstelle besitzt.

2) Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = \dfrac{4x}{3x^2-12}$.

a) Geben Sie den größtmöglichen Definitionsbereich von f an! Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion im Unendlichen!

b) Ermitteln Sie eine Stammfunktion von f. Der Graph von f, die x-Achse und die Geraden $x = \dfrac{5}{2}$ und $x = a$ ($a \in R$, $a > \dfrac{5}{2}$) begrenzen eine Fläche vollständig. Berechnen Sie die irrationale Zahl a, für die der Inhalt der zugehörigen Fläche $\ln(\sqrt[3]{16})$ beträgt.

3) Gegeben ist die Funktionsschar $f_a(x) = \dfrac{1}{a} \cdot x \cdot \sqrt{a-x}$ ($a \in R+$; $x \in R$; $0 \le x \le a$)

a) Zeichnen Sie die Funktion f_4 im gesamten Definitionsbereich!

b) Ermitteln Sie eine Gleichung der Tangente an den Graph von f_4 in P(1,75; f(1,75))!

c) Jede der Funktionen f_a besitzt genau ein lokales Maximum. Ermitteln Sie eine Gleichung der Ortskurve, auf der alle Hochpunkte liegen!

d) Jeder der Funktionen erzeugt bei Rotation um die x-Achse über dem Intervall $0 \le x \le a$ einen Rotationskörper. Berechnen Sie dessen Volumen!

4)

Die Abbildung zeigt den halben Querschnitt eines Gefäßes, das die Gestalt eines Rotationskörpers besitzt.

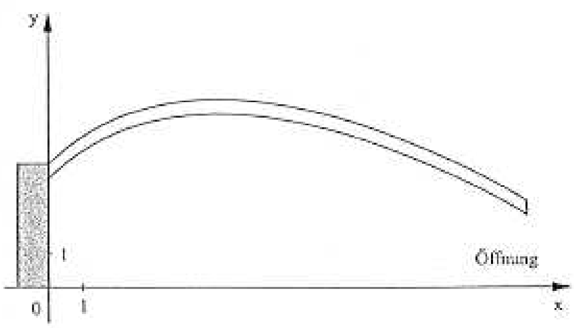


Abbildung (nicht maßstäblich)

Die innere seitliche Begrenzungsfläche wird durch die Rotation des Graphen der Funktion f_a mit $f_a(x) = \frac{1}{10}\sqrt{ax+9} \cdot (5a - x)$ ($a \in R$; $a > 4$; $x \in R$; $0 \le x \le 4a$) um die x-Achse gebildet.

Die äußere seitliche Begrenzungsfläche wird durch die Rotation des Graphen der Funktion g_a mit $g_a(x) = f_a(x) + 1$ ($a \in R$; $a > 4$; $x \in R$; $0 \le x \le 4a$) um die x-Achse bestimmt. Eine Längeneinheit entspricht jeweils einem Zentimeter.

Der angesetzte Boden des Gefäßes ist eine zylinderförmige Scheibe mit der Höhe 1,0 cm und dem Radius $r_a = g_a(0)$ (siehe Abbildung).

a) Berechnen Sie das Volumen des Gefäßbodens.

b) Geben Sie für a = 10 den maximalen Außendurchmesser des Gefäßes und den Durchmesser de Öffnung an.
Ermitteln Sie den Wert a, für den der Durchmesser der Öffnung 26,0 cm ist.

c) Die Dichte des Materials beträgt $\rho = 2{,}5\frac{g}{cm^3}$.
Ermitteln Sie die Masse des Gefäßes für a = 10.

d) Berechnen Sie den Wert a, für den das Fassungsvermögen des Gefäßes 100 Liter beträgt. Gehen Sie davon aus, dass das Gefäß bis zum Rand gefüllt werden kann.

7. Prüfungskomplex - Mathematik Schuljahr 2006/07
Exponential- und Logarithmusfunktionen

Abgabetermin 08.01.07

Aufgabe aus dem Pflichtteil:

Gegeben sind Funktionen f_k und g_k durch die Gleichungen
$y = f_k(x) = x^2 \cdot e^{1-kx}$ und $y = g_k(x) = x \cdot e^{1-kx}$ $(k \in R, k > 0; x \in R)$.

a) Geben Sie für die Funktionen f_k die Nullstellen an.
Weisen Sie nach, dass für die 2. Ableitung der Funktionen f_k gilt:
$f_k''(x) = e^{1-kx} \cdot (k^2x^2 - 4kx + 2)$ $(k \in R, k > 0; x \in R)$.
Berechnen Sie die Koordinaten der lokalen Extrempunkte der Funktionen f_k und untersuchen Sie die Art der Extrema.
Zeigen Sie, dass eine Funktion existiert, auf deren Graph alle lokalen Extrempunkte der Graphen der Funktionen f_k liegen.

Erreichbare BE-Anzahl: 12

b) Für jedes k besitzt der Graph der Funktion f_k genau zwei Wendepunkte.
Berechnen Sie die Wendestellen.

Erreichbare BE-Anzahl: 2

c) Für jedes k haben die Graphen der Funktionen f_k und g_k genau zwei gemeinsame Punkte.
Berechnen Sie die Koordinaten dieser Punkte.
Geben Sie den Wert k an, für den sich die zugehörigen Graphen im Punkt Q(1;1) schneiden.

Erreichbare BE-Anzahl: 4

d) Für jedes k existiert die Tangente an den Graphen der Funktion f_k an der Stelle x = 1.
Ermitteln Sie den Wert k, für den der Anstiegwinkel dieser Tangente 45° beträgt und geben Sie für diesen Fall eine Gleichung dieser Tangenten an.

Erreichbare BE-Anzahl: 5

e) Für jedes u ($u \in R$; $u > 0$) sind der Koordinatenursprung und der Punkt $R_u(u; f_1(u))$ Eckpunkte eines achsenparallelen Rechtecks.
Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes R_u so, dass der Flächeninhalt des zugehörigen Rechtecks maximal wird.
Geben Sie den maximalen Flächeninhalt an.

Erreichbare BE-Anzahl: 5

f) Bestimmen Sie eine Gleichung einer Stammfunktion G_k der Funktion g_k.

Der Graph der Funktion g_1, die x-Achse und die Gerade mit der Gleichung x = 4 begrenzen eine Fläche vollständig.
Für jedes a ($a \in R$, $0 < a < 4$) zerlegt die Gerade mit der Gleichung x = a diese Fläche in zwei Teilflächen.
Ermitteln Sie den Wert a, für den beide Teilflächen den gleichen Flächeninhalt besitzen.

Erreichbare BE-Anzahl: 7

Aufgaben aus dem Wahlteil:

2. Gegeben ist die Funktion f durch $y = f(x) = 2\,e^{2-x} - 2$ $(x \in R)$.

a) Geben Sie die Koordinaten der Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen der Funktion f an.
Untersuchen Sie die Monotonie und das Verhalten im Unendlichen der Funktion f.

b) In jedem Punkt $P(u \mid f(u))$ existiert genau eine Tangente t_u an den Graph der Funktion f.
Ermitteln Sie eine Gleichung für die Tangenten t_u.
Berechnen Sie den Wert für u, für den die zugehörige Tangente t_u durch den Punkt $B(1|-2)$ verläuft.
Die Tangenten t_u mit $0 \leq u \leq 2$ bilden mit der x-Achse und der y-Achse Dreiecke.
Für welchen Wert u ist der Flächeninhalt eines solchen Dreiecks ein Maximum?
Geben Sie den maximalen Flächeninhalt an.

c) Gegeben ist das Dreieck ABC durch die Punkte $A(0|-2)$, $B(1|-2)$ und $C(0|f(0))$.
Für jedes a $(a \in R,\ a > 0)$ begrenzen die Gerade mit der Gleichung $x = a$, der Graph der Funktion f, die y-Achse und die Gerade mit der Gleichung $y = -2$ eine Fläche A_a vollständig.
Berechnen Sie den Inhalt der Fläche A_a in Abhängigkeit von a.

Ermitteln Sie $\lim\limits_{a \to \infty} A_a$.

Bestimmen Sie den Wert für a so, dass sich der Flächeninhalt der Fläche A_a zum Flächeninhalt des Dreiecks ABC wie 3:2 verhält.

3. Gegeben sind die Funktionen $y = f_a(x) = a^2x - \ln(x)$ $(a \in R,\ a > 0,\ x \in R,\ x > 0)$

a) Ermitteln Sie eine Gleichung der Funktion, auf deren Graphen alle lokalen Extrempunkte der Graphen der Funktionen f_a liegen.

b) Zeigen Sie, dass es genau eine Funktion gibt, die genau eine Nullstelle besitzt.
Ermitteln Sie diese Nullstelle.

c) Für jedes a existiert eine Tangente t_a an den Graph der Funktion f_a, die durch den Koordinatenursprung verläuft.
Der Koordinatenursprung, der Berührungspunkt $B_a(x_{Ba};\ f(x_{Ba}))$ dieser Tangente mit dem Graphen der Funktion f_a und der Punkt $P_a(x_{Ba};\ 0)$ bestimmen ein Dreieck.
Ermitteln Sie den Wert a, für den das zugehörige Dreieck den Flächeninhalt 5 besitzt.

Brand-Erbisdorf, den 08.01.2007

8.Prüfungskomplex/Winkelfunktionen(Ma-LK)

1. Aufgabe Analysis aus dem Pflichtteil

Für jedes a ($a \in R$, $a > 0$) ist eine Funktion f_a durch

$y = f_a(x) = (a^2 + 1)(\sin ax + \cos ax)$ ($x \in R$; $0 \leq x \leq 2\pi a^{-1}$) gegeben.

a) Geben Sie für die Funktion f_2 die Nullstellen, die Koordinaten der lokalen Extrempunkte, die Art der Extrema, die Koordinaten der Wendepunkte und den Wertebereich an. Ermitteln Sie den maximalen Anstieg dieser Funktion.

Erreichbare Bewertungseinheiten : 6

b) Geben Sie eine Gleichung der Normalen n an den Graphen der Funktion $f_{0,5}$ im Schnittpunkt mit der y – Achse an. Ermitteln Sie den Inhalt der Fläche, die vom Graphen der Funktion $f_{0,5}$, der x-Achse und der Geraden n im I.Quadranten eingeschlossen wird.

Erreichbare Bewertungseinheiten : 5

c) Für jedes a ($a \in R$, $a > 0$) existiert eine Tangente t_a an den Graphen der Funktion f_a im Schnittpunkt mit der y-Achse. Ermitteln Sie eine Gleichung dieser Tangente t_a.
Bestimmen Sie a so, dass der Anstieg der zugehörigen Tangente t_a den Wert 2 hat.
Geben Sie eine Gleichung der speziellen Tangente an.

Erreichbare Bewertungseinheiten : 5

Für jedes a wird durch die Koordinatenachsen und den Graphen der Funktion f_a im I.Quadranten eine Fläche vollständig begrenzt.

d) Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche.

Erreichbare Bewertungseinheiten : 4

e) Weisen Sie nach, dass es genau ein a gibt, für das der Inhalt dieser Fläche extrem ist. Ermitteln Sie die Art des Extremums und geben Sie für diesen Fall den Flächeninhalt an.

Erreichbare Bewertungseinheiten : 5

2. Aufgabe Analysis aus dem Wahlteil

Für jedes t ($t \in R, t > 0$) ist eine Funktion f_t durch $y = f_t(x) = t \cdot \sin(tx) + t$ ($x \in R, x > 0$) gegeben.

a) Berechnen Sie die Nullstellen und die Koordinaten der lokalen Extrempunkte der Funktion f_t.
Weisen Sie die Art der Extrema nach.

Erreichbare BE-Anzahl: 7

b) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die vom Graphen der Funktion f_t und der x-Achse zwischen zwei benachbarten Nullstellen eingeschlossen wird.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

c) Für jede Funktion f_t betrachten wir den Wendepunkt mit der kleinsten Abszisse. Bestimmen Sie den Wert t, für den der Abstand dieses Wendepunktes vom Koordinatenursprung minimal ist.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

d) Ermitteln Sie alle Werte t, für die die jeweils zugehörige Funktion f_t im Intervall $0 \leq x \leq 2\pi$ mindestens 8 Nullstellen besitzt.

Abgabetermin: 22.01.07

1.Prüfen Sie ,ob die Punkte A(-2; 7; 10) , B(-3; 3; 6) und C(-1; 2; 3) auf der Geraden g mit

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$ liegen!

---

2. Bestimmen Sie, wenn möglich, die Koordinaten der Punkte A, B und C so,

dass sie auf der Geraden h mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ liegen!

A(x; 1;-1) , B(0; y; 0) , C(1; y, z)

---

3. Liegen die Punkte P(1; 4;-3), Q(0; -2; 3) und R(6,8; -8,8; 6,4) auf der Strecke $\overline{AB}$? A(2; -4; 4) , B(-2; 0; 2)

---

4. Ein Unterseeboot hat in einem Koordinatensystem die Koordinaten

U(2; -1,5; -1). Sein Kurs wird durch den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -0{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}$ beschrieben.

Trifft es ohne Kursänderung auf das Schiffswrack W, welches die Koordinaten W(-7; -6; -1,7) besitzt?

---

5. Untersuchen Sie rechnerisch (ohne GTR-Programm) die gegenseitige Lage der Geraden
g und h! Berechnen Sie gegebenenfalls Schnittpunkt und Schnittwinkel der Geraden!

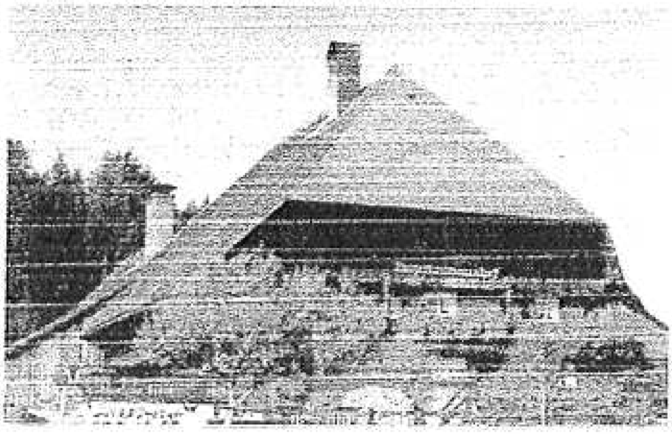
A) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 17 \\ 15 \\ 6 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$

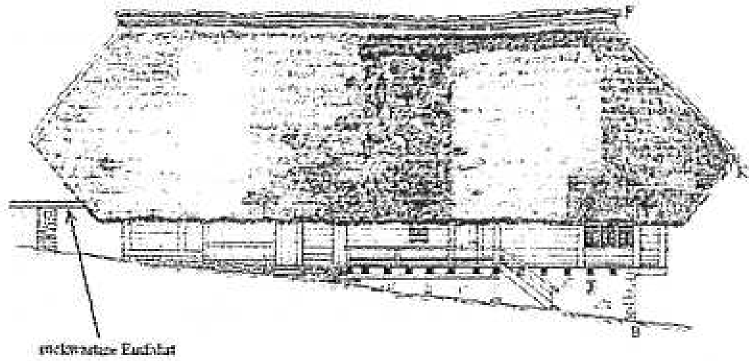
B) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

---

6. Für jedes t ($t \in R$) gibt es genau einen Punkt C_t mit
C_t(-3+4t ; -22+25t ; 10-3t). Zeigen Sie, dass alle Punkte C_t auf einer Geraden g liegen, und geben Sie eine Gleichung dieser Geraden an!

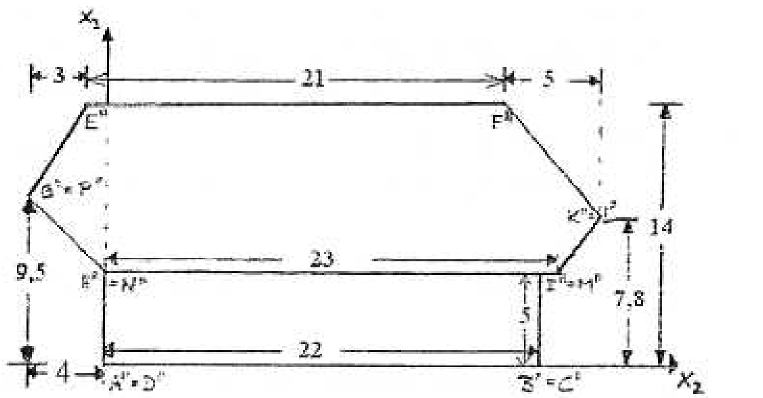
Das Schwarzwaldhaus





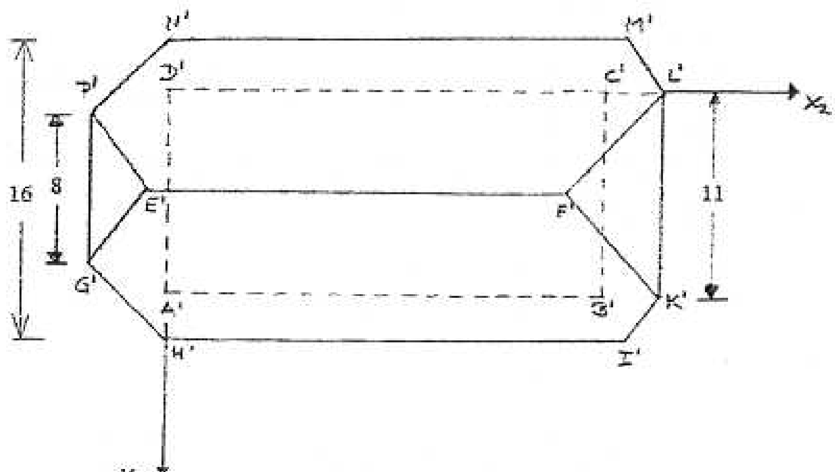
Bauernhöfe im Schwarzwald haben in der Regel ein tief herabgezogenes so genanntes Krüppelwalmdach. Diese Dachform wird vor allem in Gegenden gewählt, wo Giebel vor rauer Witterung geschützt werden müssen.

a) Gegeben sind Grund- und Aufriss eines Schwarzwaldhauses (alle Maße in Meter).
Zeichnen Sie ein Schrägbild des Hauses in einem geeigneten Maßstab.
Geben Sie die Koordinaten der eingezeichneten Punkte an.
Untersuchen Sie, ob die Punkte E, G, H, I, K und F eine ebene Dachfläche bilden.



b) Die Gemeindeverwaltung empfiehlt allen Hausbesitzern, Dachflächen, die eine größere Dachneigung als 45° aufweisen, mit Schneefanggittern zu versehen. Welche Dachflächen des Bauernhauses müssen nachgerüstet werden?

c) Wie groß ist die gesamte Dachfläche?



d) Welche Grundfläche hat der Speicherboden in 10 m Höhe über der Grundfläche?

e) Das Schwarzwaldhaus liegt an einem Hang, der die vordere Grundkante BC enthält und eine Steigung von 11 % aufweist. An der Hausrückseite soll vom Hang her eine waagerechte Einfahrt angelegt werden, die in einer Höhe von 6 m über der Grundfläche ins Haus führt. Wie weit von der Hausrückseite entfernt muss mit der Einfahrt begonnen werden?

Prüfungskomplex 10 — Thema - Algebra - Prüfungsaufgaben -

T: 26.2.07

1.) Zwei Flugzeugkurse k_1 und k_2 werden von einer Bodenstation O aus kontrolliert, welche im Koordinatenursprung eines gedachten kartesischen Koordinatensystems liegt. Die Kurse liegen auf folgenden Geraden:

$$k_1\colon \vec{x}_a = \begin{pmatrix}3\\9\\2\end{pmatrix} + a\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}; \quad k_2\colon \vec{x}_b = \begin{pmatrix}0,5\\4\\4\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} \qquad (a, b \in R;\ 1\ \text{LE} \mathrel{\hat{=}} 1\ \text{km}).$$

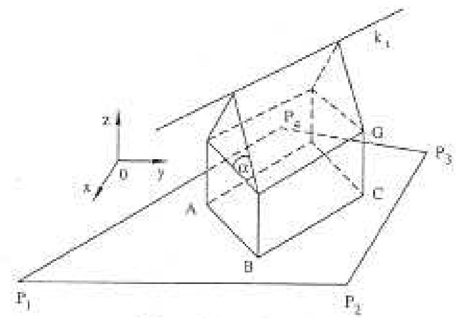
a) Weisen Sie nach, daß beide Flugzeugkurse windschief zueinander liegen, und bestimmen Sie den Abstand dieser Geraden.

b) In der Nähe des Flugraumes soll eine geradlinige Autostraße gebaut werden. Die Sicherheitsbestimmungen schreiben vor, daß die Straße nicht innerhalb eines Kreises verlaufen darf, der durch die folgenden Punkte bestimmt ist: Bodenstation O(0; 0; 0), Fußpunkt eines Beobachtungsturmes T'(3; 0; 0) sowie Schnittpunkt S der in die x-y-Ebene senkrecht projizierten Flugkurse k_1 und k_2.
Die Baukommission beschließt, daß die Straße zumindest diesen Kreis tangieren soll, wobei die Havariestation $H\left(-\frac{8}{3}; 2; 0\right)$ am Rand der geplanten Straße liegen muß.
Zeigen Sie, daß der Punkt S die Koordinaten (1,5; 4,5; 0) hat, und bestimmen Sie die Geradengleichungen, welche die möglichen Straßen beschreiben.

c) In einem Beobachtungsturm T(3; 0; 0,1) soll ein neues Ortungsgerät eingerichtet werden. Dabei soll das Gerät so geeicht sein, daß es in seiner Ausgangslage einen Strahl aussendet, der auf einer Geraden g liegt, welche die Kurse k_1 und k_2 schneidet.
Ermitteln Sie einen Richtungsvektor der Geraden g.

---

2. Familie Baumann hat sich ein Grundstück gekauft und möchte darauf ein Eigenheim errichten. Das ebene, viereckige Grundstück wird durch die Grenzsteine
P_1 (25; 0; 0), P_2 (x_2; y_2; 0), P_3 (−2; 36; 0) und P_4 (−5; 15; 0) markiert (1 LE $\hat{=}$ 1 m).
Die Grenzsteine P_2 und P_4 liegen achsensymmetrisch zur Diagonale $\overline{P_1P_3}$.



(Skizze nicht maßstäblich)

a) Berechnen Sie die Standortkoordinaten des Grenzsteines P_2.
Welchen Grundstückspreis mußte Familie Baumann bezahlen, wenn der Quadratmeterpreis des erschlossenen Grundstücks 73 DM beträgt?

Das Eigenheim kann als Quader mit einem aufgesetzten, dreiseitigen, geraden Prisma angenommen werden. Der Punkt C(4; 33; 0) ist ein Eckpunkt der Fundamentplatte. Jedes Haus des gewählten Typs hat eine Breite $\overline{AB}$ = 10 m und eine Länge $\overline{BC}$ = 15 m.
Die beiden Rechtecke des Daches liegen in Ebenen

E_t: $3tx + 4ty + 25z = 144t + 200$ bzw.
F_t: $3tx + 4ty - 25z = 94t - 200$ $\qquad (t \in R;\ t > 0)$.

Der Dachneigungswinkel α wird durch den Parameter t beeinflußt (siehe Skizze).

b) Zeigen Sie, daß die Seitenwandhöhe $\overline{CG}$ jedes solchen Hauses von der Wahl des Parameters t unabhängig ist, und berechnen Sie diese.

c) In einer speziellen Ausführung des Projektes liegen die Dachflächen in den Ebenen E_5 bzw. F_5.
Ermitteln Sie eine Gleichung der Dachfirstgeraden k_5.
Weisen Sie nach, daß die Dachebenen E_5 und F_5 orthogonal zueinander sind.
Für die Finanzierung des Hauses wird der umbaute Raum (Gesamtvolumen des Hauses ohne Berücksichtigung der Wandstärken) benötigt.
Berechnen Sie für dieses spezielle Projekt den umbauten Raum.

d) Um den umbauten Raum zu verkleinern, soll der Dachneigungswinkel α verringert werden. Als Auflage vom Bauamt muß dieser Winkel zwischen einschließlich 30° und 45° liegen.
Berechnen Sie für diese Bedingungen das Intervall der möglichen Parameterwerte von t.

e) Zum Bau des Hauses wird ein Turmdrehkran mit horizontalem Ausleger verwendet. Der Kran soll so aufgestellt werden, daß die Grenzsteine P_1, P_3 und P_4 gleichweit vom Standort des Kranes entfernt sind.
Berechnen Sie die Koordinaten des Kranstandortes und die erforderliche Auslegerlänge.
Überprüfen Sie, ob durch solch einen Kran bei dieser Aufstellung das gesamte Grundstück erreicht werden kann.