Lösungen Teil B (mit CAS)

1.1. geg.: y – durchschnittl. Lebenserwartung (in a)

$$y = f_{a,b,c}(x) = \frac{a}{1+be^{-cx}} \quad (a,b,c > 0;\ x \geq 0)$$

$f_{80;\,1,2;\,0,05}(x)$ für Lebenserwartung seit 1900

ges.: Wertebereich für $y = \frac{80}{1+1{,}2e^{-0{,}05x}}$

Lös.: $\underline{\underline{WB = \{y;\ y < 80;\ y \geq \tfrac{400}{11} = 36{,}\overline{36}\}}}$

$y < 80$: für $x \to +\infty$, im Nenner 1

$y \geq \frac{400}{11}$: für $x \to 0$ → CP (Grafik, Analyse, graf. Lös. → FMAX)

ges.: Interpretation Verlauf $f(x)$

Lös.:
- $f(x)$ ist monoton wachsend ⇒ durchschnittl. Lebenserwartung steigt
- $f(x)$ hat $y = 80$ als Asymptote ⇒ durchschnittl. LE steigt nicht über 80 Jahre

ges.: Jahr für durchschnittlichen LE von 65 Jahren

Lös.: • $65 = \frac{80}{1+1{,}2e^{-0{,}05x}}$

CP: SOLVE$(65 = \ldots, x) = 32{,}97 \approx 33$

⇒ seit 1900 ⇒ $\underline{\underline{\text{Jahr ist } 1933}}$

1.2. geg.: $\frac{a}{1+be^{-cx}} = \frac{ae^{cx}}{b+e^{cx}}$ Zeigen!

$$\frac{a}{\frac{e^{cx}+b}{e^{cx}}} = \ldots$$

$$\underline{\underline{\frac{a\cdot e^{cx}}{b+e^{cx}} = \frac{ae^{cx}}{b+e^{cx}}}} \quad \text{q.e.d.}$$

e

1.3. ges.: b, falls I und II gilt

I) $f_{a,b,c}(x)$ besitzen einen WP

II) Tangente im WP schneidet y-Achse im pos. Bereich

u.B.: $$f''_{a,b,c}(x) = 0 = \frac{ab^2c^2e^{cx} - abc^2e^{2cx}}{(e^{cx}+b)^3} \quad | \cdot \text{Nenner}$$

$$\Rightarrow \quad 0 = \underbrace{abc^2e^{cx}}_{\neq 0}(b - e^{cx}) \qquad a,b,c > 0$$

$$\Rightarrow \quad 0 = b - e^{cx}$$

$$e^{cx} = b$$

$$\ln e^{cx} = \ln b$$

$$cx = \ln b$$

$$\underline{\underline{x_w = \frac{1}{c}\ln b}}$$

$$f'_{a,b,c}\left(\frac{1}{c}\ln b\right) = m = \frac{abc \cdot e^{c \cdot \frac{1}{c}\ln b}}{(e^{c \cdot \frac{1}{c}\ln b}+b)^2} \qquad \left(f'(x) = \frac{abce^{cx}}{(e^{cx}+b)^2}\right)$$

$$= m = \frac{abce^{\ln b}}{(e^{\ln b}+b)^2}$$

$$= m = \frac{ab^2c}{4b^2} = \underline{\underline{\frac{1}{4}ac}}$$

$$\Rightarrow t: \quad y = \frac{1}{4}ac\,x + n \quad \text{mit } n > 0!$$

$$P_w \rightarrow \quad P_w\left(\frac{1}{c}\ln b \,\middle|\, f\left(\frac{1}{c}\ln b\right)\right)$$

$$f_{a,b,c}\left(\frac{1}{c}\ln b\right) = \frac{a}{1+be^{-c\cdot\frac{1}{c}\ln b}} = \frac{a}{1+b\cdot e^{-\ln b}}$$

$$= \frac{a}{\frac{e^{\ln b}+b}{e^{\ln b}}} = \frac{ab}{2b} = \underline{\underline{\frac{1}{2}a}}$$

$$\Rightarrow P_w\left(\frac{1}{c}\ln b \,\middle|\, \frac{1}{2}a\right)$$

$$P_w \rightarrow \quad y = \frac{1}{2}a = \frac{1}{4}ac \cdot \frac{1}{c}\ln b + n$$

$$\frac{1}{2}a = \frac{1}{4}a\ln b + n \quad \underline{\underline{\Rightarrow n = \frac{1}{2}a - \frac{1}{4}a\ln b}}$$

$\wedge$ t: $y = \frac{1}{4}acx + \frac{1}{2}a - \frac{1}{4}a\ln b$

und $n > 0$: $\frac{1}{2}a - \frac{1}{4}a\ln b > 0$

$2a - a\ln b > 0$

$a(2 - \ln b) > 0 \quad | : a \neq 0$

$2 - \ln b > 0 \quad | + \ln b$

$2 > \ln b \quad | e^{\dots}$

$e^2 > e^{\ln b}$

$e^2 > b$

und b muss größer als 1 sein, sonst liegt der Wendepunkt wegen $x_W = \frac{1}{c}\ln b$ im negativen Bereich der x-Achse!

($\ln b$ ist < 0 für $b < 1$!)

$\wedge$ gefordert ist aber WP für $x > 0$!

$\wedge$ $1 < b < e^2$

1.4. ges.: FM. mittels logistischer Regression für die durchschnittl. LE neugeborener Ju seit 1871

Lös.: Datentabelle: (Veränder der x Werte als Diff. zu 1871!)

0	20	39	53	61	78	94	109	120	130
35,6	40,6	.....							75,6

logistische Regression mit CP:

$$y = \frac{102,926}{1 + 1,761 e^{-0,012x}}$$

ges.: In welchem Jahr steigt die durchschnittl. LE am meisten?

→ Jahreszahl des größten Anstieges der FM.

→ $\boxed{m \to Max}$ (y auf y1 gespeichert!)

AF! $m = y' = \dfrac{271879029\, e^{\frac{3x}{250}}}{125\left(1000 \cdot e^{\frac{3x}{250}} + 1761\right)^2} = g(x)$ ZF!

Window:
x: 0..100!
y: 0..1!

$\wedge$ g(x) zeichnen, Max: $x_{Max} \approx 47$

$\Rightarrow$ $1871 + 47 = 1918$

$\Rightarrow$ 1918 steig die durchschnittl. LE am meisten

ges: durchschnittl. LE eines neugebor. Ju im Jahr 2007?

Lös: aus 2007 folgt für $x = 2007 - 1871 = \underline{136}$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{104{,}926}{1 + 1{,}761\, e^{-0{,}012 \cdot 136}} = \underline{\underline{76{,}6 \text{ Jahre}}}$$

1.5. X – durchschnittliche LE

geg.: X sei $N(\mu, \sigma)$-verteilt

mit $\mu = 76$ Jahren

$P(X \geqq 60) = 0{,}88$

ges.: σ, $P(X \geqq 67)$

Lös.: $P(X \geqq 60) = 0{,}88$

$$\Rightarrow P(X \leqq 60) = 0{,}12$$

$$\Phi\left(\frac{60-76}{\sigma}\right) = 0{,}12$$

$$\Phi\left(-\frac{16}{\sigma}\right) = 0{,}12$$

$$1 - \Phi\left(\frac{16}{\sigma}\right) = 0{,}12$$

$$\Phi\left(\frac{16}{\sigma}\right) = 0{,}88 \qquad \text{Tabelle!}$$

$$\frac{16}{\sigma} = 1{,}18$$

$$\underline{\underline{\sigma \approx 13{,}6}}$$

$$\Rightarrow P(X \geqq 67) = 1 - P(X \leqq 67)$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{67-76}{13{,}6}\right)$$

$$= 1 - \Phi(-0{,}6617) = 1 - (1 - \Phi(0{,}6617))$$

$$= \Phi(0{,}6617) \underset{\text{Tab.}}{=} 0{,}7454 \,\underline{\underline{\widehat{=}\ 74{,}54\,\%}}$$